

# Dinâmica do prémio de maturidade nos EUA e na Área do Euro: quem precede quem?

Nikolay Iskrev  
Banco de Portugal

Janeiro 2018

## Resumo

Este artigo examina a relação dinâmica entre o prémio de maturidade das *yields* de obrigações soberanas na área do euro e nos EUA. Os prémios de maturidade são extraídos usando um modelo da estrutura temporal do tipo *affine* usando dados diários das *yields* de obrigações de cupão zero. Os resultados mostram um comovimento forte entre variações nos prémios, especialmente na parte longa da curva de rendimentos. Uma investigação mais detalhada da relação causal entre os prémios de maturidade na área do euro e nos EUA mostra que apenas uma pequena parte do comovimento pode ser atribuída a uma região determinar a outra. (JEL: G12, E43)

---

## Introdução

Embora as decisões das famílias e das empresas quanto a pedir emprestado ou emprestar fundos sejam afetadas pelas taxas de juro de todas as maturidades, tipicamente são as taxas de juro a mais longo prazo que apresentam uma maior relevância para as decisões de despesa agregada numa economia. Em particular, as taxas de juro de longo prazo têm um papel determinante quando uma empresa decide iniciar um novo projeto de investimento, quando as famílias decidem se e quando comprar um automóvel e quando os decisores de política decidem como financiar os gastos públicos. Do ponto de vista teórico, as taxas de juro de prazo mais longo podem ser vistas como médias ajustadas do risco das taxas de juro de curto prazo esperadas no futuro. Esta relação entre taxas de curto e longo prazo explica o funcionamento do mecanismo de transmissão da política monetária – alterações na taxa de juro de curto prazo controlada pelo banco central influenciam as decisões de despesa agregada uma vez que afetam as expectativas sobre as taxas de juro

---

Agradecimentos: O autor agradece a Isabel Correia, Nuno Alves, António Antunes, Sandra Gomes, Miguel Gouveia, e aos participantes num seminário do Banco de Portugal os seus comentários e sugestões. As opiniões expressas neste artigo são pessoais e não refletem necessariamente as do Banco de Portugal ou do Eurosistema.

E-mail: nikolay.iskrev@bportugal.pt

de curto prazo no futuro e conseqüentemente afetam as taxas de juro a prazos mais longos.<sup>1</sup>

O facto de o risco ser um fator importante que tem de ser considerado dificulta a análise. Quer a quantidade quer o preço do risco nas obrigações de longo prazo variam ao longo do tempo, dando origem a um prémio de maturidade (em inglês *term premium*) que varia ao longo do tempo e que torna mais complexa a relação entre as taxas de juro de política e as taxas de juro de longo prazo. O prémio de maturidade representa a compensação exigida pelos investidores em obrigações de longo prazo devido ao risco de as taxas de juro de curto prazo no futuro poderem não evoluir como esperado. Dada a sua importância, uma quantidade significativa de contributos para a literatura económica tem caracterizado o prémio de maturidade bem como os fatores que afetam o seu nível e o seu comportamento dinâmico.

Este artigo estuda a relação entre o prémio de maturidade nas *yields* (taxas de rendimento) de obrigações soberanas na área do euro (AE) e nos EUA. A tendência para as taxas de juro de obrigações soberanas em economias avançadas apresentarem um elevado comovimento está largamente documentado, especialmente na parte mais longa da curva de rendimentos. Um dos objetivos deste artigo é estabelecer se este comovimento se verifica também nos prémios de maturidade das *yields*. Para analisar esta questão são estimados modelos da estrutura temporal do tipo *affine* para as taxas de juro na AE e EUA e com base neles é feita a decomposição entre as expectativas referentes à evolução da taxa de juro e os prémios de maturidade. Em seguida, o grau de comovimento entre os níveis e variações dos prémios de maturidade é medido com base em coeficientes de correlação linear. O segundo objetivo deste artigo é explorar a evidência sobre uma relação causal entre os dois prémios de risco, isto é em que medida podemos dizer que movimentos no prémio de maturidade numa economia determina os movimentos no prémio de maturidade da outra. Esta análise é feita a partir da estimação de versões estáticas e dinâmicas de indicadores propostos na literatura sobre séries temporais para medir o grau e direção de relações causais. Os resultados mostram que existe uma relação causal entre os prémios na AE e nos EUA que varia no tempo. Adicionalmente, conclui-se que apenas uma parte relativamente pequena do comovimento observado pode ser atribuída a uma região determinar a outra.

O resto do artigo está organizado em quatro secções. A primeira apresenta alguns conceitos básicos sobre a curva de rendimentos e introduz a teoria das expectativas das taxas de juro. A segunda secção começa por introduzir e estimar um modelo da estrutura temporal do tipo *affine*, que é usado para decompor as *yields* de longo prazo em expectativas e prémio de maturidade e

---

1. No caso da Reserva Federal Norte Americana, um dos objetivos explicitamente referidos no seu mandato é a promoção de taxas de juro de longo prazo moderadas, assim como o máximo emprego e preços estáveis.

depois avalia o grau de comovimento entre as *yields* de longo prazo na AE e nos EUA. Na terceira secção várias medidas de causalidade entre os prémios de maturidade são descritas e estimadas. Na última secção são feitos alguns comentários finais.

## A estrutura temporal das taxas de juro

Nesta secção é introduzida alguma terminologia básica sobre a curva de rendimentos e é apresentada a teoria das expectativas da taxa de juro, que está na base da maior parte dos modelos modernos da estrutura temporal das taxas de juro.

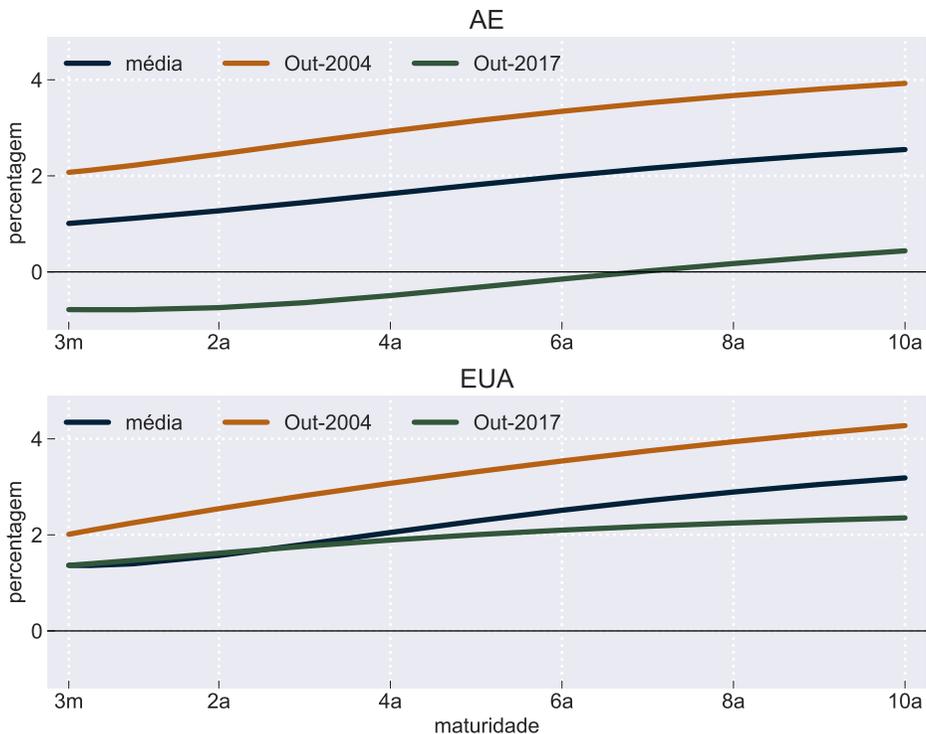
### *Notação e conceitos básicos*

Embora a maior parte das obrigações pague cupões ao longo da sua vida, os economistas preferem trabalhar com obrigações de cupão zero também conhecidas por obrigações a desconto. Estas obrigações prometem pagar 1 euro num dia no futuro – a data de maturidade dessa obrigação. Obrigações que não são de cupão zero podem ser vistas como portefólios de obrigações de cupão zero. As taxas de juro de obrigações de cupão zero chamam-se *yields* e a função que descreve a relação entre as maturidades de obrigações e as respectivas *yields* num certo ponto do tempo é chamada a curva de rendimentos. As obrigações de cupão zero são convenientes porque existe uma relação simples entre o preço  $P_t^{(n)}$  no momento  $t$  e a *yield*  $y_t^{(n)}$  no momento  $t$  dessas obrigações:

$$P_t^{(n)} = e^{-n \times y_t^{(n)}},$$

onde  $n$  é o tempo até à maturidade medida em anos. A *yield* é o retorno anualizado continuamente composto de deter uma obrigação de cupão zero até à maturidade. Num determinado momento do tempo a *yield* de uma obrigação vai depender da sua maturidade e a curva de rendimentos é a função que descreve essa relação. O gráfico 1 mostra várias curvas de rendimentos históricas para maturidades entre 3 meses e 10 anos para a AE e os EUA observadas no primeiro e último mês da amostra (outubro de 2004 e outubro de 2017, respetivamente). Também estão representadas as curvas médias no período amostral. Vários pontos são de salientar. Em primeiro lugar, as curvas são positivamente inclinadas e têm configurações semelhantes, quer ao longo do tempo quer entre regiões. As curvas mais comuns são positivamente inclinadas apesar de historicamente terem existido episódios de curvas negativamente inclinadas, por exemplo no início dos anos 2000 nos EUA. Em segundo lugar, as curvas de rendimentos da AE e dos EUA deslocaram-se para baixo ao longo do período amostral e estão

abaixo das curvas médias no final do período. No entanto, enquanto no início do período amostral os níveis das curvas de rendimento na AE e EUA são aproximadamente os mesmos, no final da amostra são muito diferentes, estando a curva da AE bastante abaixo da dos EUA. Um dos principais objetivos da investigação sobre a estrutura temporal das taxas de juro prende-se com a explicação do formato da curva de rendimentos ao longo do tempo e entre regiões.



**GRÁFICO 1: Curva de rendimentos na AE e nos EUA.** O gráfico mostra as curvas de rendimento de obrigações de cupão zero na AE e EUA no início e fim do período amostral (outubro de 2004 e outubro de 2017, respetivamente), bem como as curvas de rendimento médias no período amostral.

Fontes: BCE, Reserva Federal dos EUA e cálculos do autor.

### *A hipótese das expectativas*

A teoria das expectativas é um dos modelos mais antigos e mais populares da estrutura temporal das taxas de juro.<sup>2</sup> Na sua formulação mais geral,

2. As principais ideias subjacentes à teoria das expectativas remontam ao trabalho de Fisher (1896) e Lutz (1940).

a hipótese das expectativas postula que as taxas de juro de longo prazo e as taxas de juro de curto prazo esperadas no futuro têm de estar ligadas.<sup>3</sup> A teoria é motivada pela observação que os investidores escolhem entre obrigações de curto e de longo prazo ao compararem o rendimento das obrigações de longo prazo com o rendimento esperado de uma estratégia de investimento que consiste em reinvestir numa sequência de obrigações de curto prazo. Para perceber a intuição, assumamos por um momento que as *yields* futuras são conhecidas com certeza e considere-se um investidor que decide entre duas estratégias de investimento: comprar obrigações a 2 anos hoje ou comprar obrigações a 1 ano hoje e posteriormente reinvestir o retorno deste investimento em obrigações a 1 ano novamente. Se o investidor optar pela primeira estratégia tem de pagar  $P_t^{(2)} = e^{-2 \times y_t^{(2)}}$  euros hoje para receber 1 euro daqui a 2 anos. O preço de uma obrigação a 1 ano daqui a um ano é  $P_{t+1}^{(1)} = e^{-y_{t+1}^{(1)}}$ . O preço hoje de  $P_{t+1}^{(1)}$  obrigações a 1 ano é  $P_t^{(1)} \times P_{t+1}^{(1)} = e^{-y_t^{(1)}} P_{t+1}^{(1)}$ . Logo, para receber 1 euro dentro de dois anos usando a segunda estratégia, o investidor hoje tem de pagar  $e^{-y_t^{(1)}} \times e^{-y_{t+1}^{(1)}}$ . As duas estratégias geram o mesmo retorno e logo têm de requerer o mesmo investimento inicial, ou seja

$$e^{-2 \times y_t^{(2)}} = e^{-(y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)})}.$$

A ausência de possibilidades de arbitragem requer portanto que

$$y_t^{(2)} = \frac{1}{2}(y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)}).$$

Usando o mesmo argumento, pode-se estabelecer a seguinte relação entre a *yield* de obrigações com  $n$  anos até à maturidade e a *yield* de obrigações a 1 ano presentes e futuras:

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{n} \left( y_t^{(1)} + y_{t+1}^{(1)} + \dots + y_{t+n-1}^{(1)} \right) \quad (1)$$

A incerteza relativamente às *yields* de curto prazo futuras leva a que decisões de investimento tenham de ser feitas com base na expectativa dos investidores quanto às *yields* futuras. Adicionalmente, os investidores são avessos ao risco e pedirão um prémio por deter obrigações de longo prazo que apresentam mais risco. Nas formulações clássicas da teoria das expectativas este prémio é nulo ou igual a uma constante diferente de zero. No entanto, numerosos estudos que testam formulações da hipótese das expectativas encontraram evidência de um prémio de risco que varia ao longo do tempo (veja-se por

---

3. Na literatura é usual distinguir entre a “hipótese pura das expectativas”, segundo a qual as taxas de juro de longo prazo são iguais à média das taxas de juro de curto prazo esperadas no futuro, e a “hipóteses das expectativas” segundo a qual desvios das taxas de juro de longo prazo da média das taxas de juro de curto prazo esperadas no futuro são constantes ao longo do tempo.

exemplo Mankiw *et al.* (1984), Fama e Bliss (1987), Campbell e Shiller (1991)). Isto leva-nos à seguinte representação mais geral das *yields* de obrigações:

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} E_t y_{t+h}^{(1)} + TP_t^{(n)}, \quad (2)$$

onde  $TP_t^{(n)}$  representa o prémio de maturidade no momento  $t$  para obrigações com  $n$  anos até à maturidade. De forma a separar o prémio de maturidade da componente de expectativas, precisamos de um modelo da estrutura temporal. Na próxima secção é descrito e estimado um destes modelos.

### Decomposição da evolução das *yields* com base num modelo da estrutura temporal das taxas de juro

Nesta secção, usam-se dados de *yields* de obrigações de cupão zero para decompor as taxas de juro de longo prazo observadas na componente de expectativas e de prémios de maturidade. Neste contexto, é estimado um modelo da estrutura temporal das taxas de juro do tipo *affine*. De acordo com este modelo, as *yields* e a componente de expectativas podem ser descritas como funções *affine* de um número reduzido de fatores de risco, que são modelizados como processos lineares. Ao se excluirmos possibilidades de arbitragem, são impostas restrições sobre o comportamento das *yields* ao longo do tempo e entre diferentes maturidades. Estas restrições facilitam a estimação do modelo em termos de um número reduzido de parâmetros. No Apêndice descreve-se em mais detalhe o modelo da estrutura temporal das taxas de juro do tipo *affine* bem como a sua derivação.

#### Dados e estimação

Nesta secção apresentam-se os resultados da estimação dum modelo da estrutura temporal das taxas de juro do tipo *affine* com dados diários das *yields* de obrigações de cupão zero para a AE e os EUA. O modelo de Svensson (1994) é usado para calcular as curvas de rendimento diárias, considerando estimativas dos parâmetros fornecidas pelo BCE e pela Reserva Federal Norte Americana.<sup>4</sup> No caso das *yields* da AE, são usadas obrigações soberanas com notação creditícia AAA, que são comparáveis em termos de propriedades de

4. Os parâmetros estimados podem ser obtidos para a AE em [http://www.ecb.europa.eu/stats/financial\\_markets\\_and\\_interest\\_rates/euro\\_area\\_yield\\_curves/html/index.en.html](http://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html) e para os EUA em <https://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2006/200628/200628abs.html>. O modelo de Svensson também é usado pelo BCE para produzir curvas de rendimento diárias para a AE, bem como por Gürkaynak *et al.* (2007) cujos dados de *yields* de cupão zero são frequentemente usados na estimação de modelos da estrutura temporal das taxas de juro para os EUA.

risco às obrigações do tesouro Norte Americanas.<sup>5</sup> Usando os parâmetros estimados constroem-se curvas de rendimentos diárias para maturidades entre 1 mês e 10 anos, para o período entre setembro de 2004 e outubro de 2017.<sup>6</sup> No gráfico 2 apresentam-se as séries temporais das *yields* de obrigações cupão zero da AE e dos EUA.

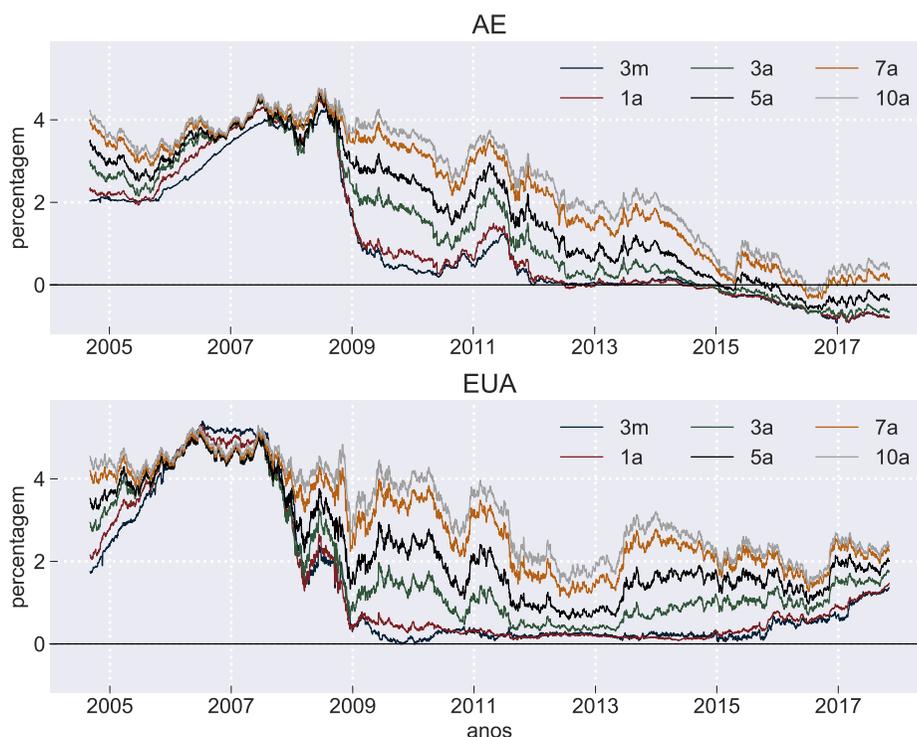


GRÁFICO 2: *Yields* cupão zero na AE e nos EUA. O gráfico apresenta as séries temporais das *yields* de cupão zero da AE e dos EUA para determinadas maturidades. Fontes: BCE e Reserva Federal dos EUA.

Na estimação do modelo descrito acima é seguido o procedimento desenvolvido por Adrian *et al.* (2013) (ACM) que mostram que os parâmetros do modelo podem ser estimados usando regressões lineares. Em particular, a abordagem proposta considera que os fatores de risco correspondem à primeira componente principal das observações das *yields* das obrigações, e modeliza os fatores como um modelo vetor autoregressivo. Os parâmetros do

5. Note-se que ao escolhermos obrigações soberanas com notação creditícia AAA na AE, os países selecionados altera-se ao longo do tempo. As notações que o BCE usa são fornecidas pela Fitch Rating.

6. Dados oficiais para a AE estão disponíveis a partir de 6 de setembro de 2004, enquanto os dados para os EUA estão disponíveis desde 14 de junho de 1961.

modelo são então obtidos em três passos, usando regressões estimadas com método dos Mínimos dos Quadrados Ordinários. No Apêndice descrevem-se mais detalhes sobre o procedimento de estimação.

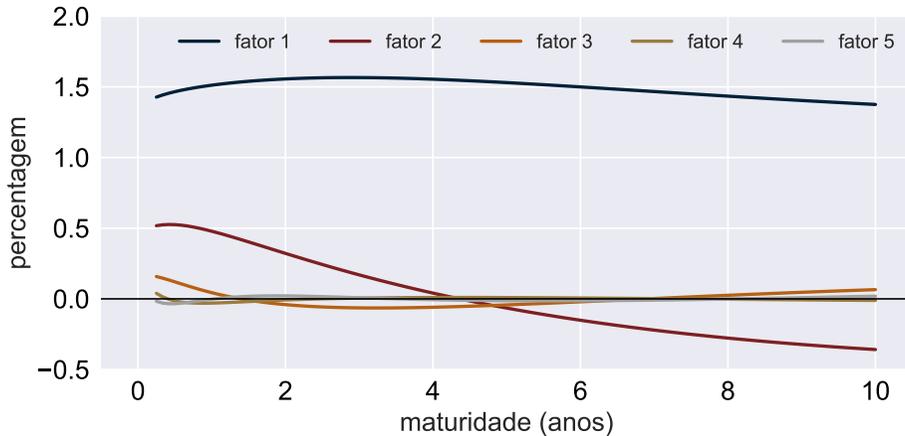


GRÁFICO 3: **Loadings dos fatores de risco.** O gráfico apresenta os *loadings* das *yields* das obrigações das primeiras cinco componentes principais.

Fonte: BCE, Reserva Federal do EUA e cálculos do autor.

### *Número de fatores de risco*

No seguimento do trabalho de Litterman e Scheinkman (1991), é comum na literatura resumir a estrutura temporal através de componentes principais da matriz de covariâncias das *yields* de obrigações de cupão zero. Em geral as três primeiras componentes principais são suficientes para capturar a maior parte da variação nas *yields*. Ou seja, existem três fatores de risco significativos para explicar o formato da curva de rendimentos. Tipicamente, estes fatores são referidos como o *nível*, *declive* e *curvatura*. Para perceber a denominação escolhida para os fatores considere-se os *loadings* dos fatores apresentados no gráfico 3. Os *loadings* dos fatores mostram a sensibilidade das *yields* de diferentes maturidades a variações em cada componente principal, ou fator de risco. O gráfico mostra que variações no primeiro fator levam a uma deslocação do nível das *yields* de todas as maturidades enquanto variações no segundo fator deslocam as maturidades curta e longa em direções opostas. Por fim, variações no terceiro fator levam a deslocações das maturidades curtas e longas na mesma direção, ficando as maturidades de médio prazo basicamente inalteradas. Adicionalmente, o gráfico mostra que as *yields* de todas as maturidades são em grande medida sensíveis apenas aos três primeiros fatores enquanto variações quer na quarta quer na quinta componente principal têm apenas um impacto pouco significativo. No gráfico

	all	3m	1a	2a	3a	4a	5a	10a
# das CPs	(a) AE							
1	96.439	86.158	89.698	95.056	98.247	99.650	99.855	94.282
2	3.434	12.473	10.147	4.884	1.610	0.208	0.054	5.529
3	0.115	1.184	0.141	0.038	0.139	0.138	0.081	0.168
4	0.009	0.069	0.004	0.021	0.002	0.003	0.009	0.019
5	0.003	0.105	0.011	0.000	0.002	0.001	0.000	0.002
# das CPs	(b) EUA							
1	94.685	85.601	89.251	92.898	96.084	98.451	99.573	88.355
2	4.972	11.552	10.101	7.033	3.725	1.164	0.030	11.053
3	0.309	2.296	0.643	0.004	0.165	0.383	0.383	0.537
4	0.032	0.525	0.001	0.064	0.025	0.000	0.014	0.051
5	0.002	0.023	0.004	0.001	0.001	0.002	0.000	0.004

QUADRO 1. Percentagem da variância explicada pelas primeiras 5 componentes principais.

Fonte: Cálculos do autor.

3 são apresentados dados para a AE mas os resultados para os EUA são muito parecidos.

Uma outra abordagem para determinar o número de fatores é calcular a parte da variância total das *yields* observadas que é explicada por cada fator de risco adicional. O quadro 1 mostra que quer para a AE quer para os EUA as três primeiras componentes principais são suficientes para capturar mais de 99% da variância das *yields* em termos gerais bem como das *yields* para maturidades específicas.

Estes resultados estão em linha com o consenso geral na literatura de que as três primeiras componentes principais da curva de rendimentos são suficientes para capturar bem a dinâmica da estrutura temporal. As estimativas de ACM para os EUA baseiam-se no entanto em cinco fatores de preço e esta é a especificação que está na base da decomposição da curva de rendimentos publicada pela Reserva Federal de Nova Iorque. Por consistência com esta abordagem, apresentam-se os resultados baseados num modelo com 5 fatores para as curvas quer da AE quer dos EUA.<sup>7</sup>

7. Deve-se no entanto salientar que os prémios de maturidade dos EUA publicados diariamente pela Reserva Federal de Nova Iorque são estimados com uma amostra que começa em 1961 enquanto as estimativas apresentadas neste artigo são obtidas com uma amostra com início em 2004. O principal impacto desta diferença sobre os resultados é no nível do prémio de maturidade, que é mais alto no caso da amostra mais recente. A dinâmica dos prémios de maturidade permanece praticamente inalterada. Este efeito no nível deve-se ao facto da média das taxas de juro de curto prazo ser bastante mais alta na amostra mais longa, o que leva a uma componente de expectativas mais alta e a um prémio de maturidade mais baixo.



GRÁFICO 4: **Decomposição das yields a 10 anos.** O gráfico apresenta a decomposição das *yields* diárias a 10 anos da AE e dos EUA em componente de expectativas e prêmios de maturidade.

Fontes: BCE, Reserva Federal dos EUA e cálculos do autor.

### *Estimativas do prêmio de maturidade*

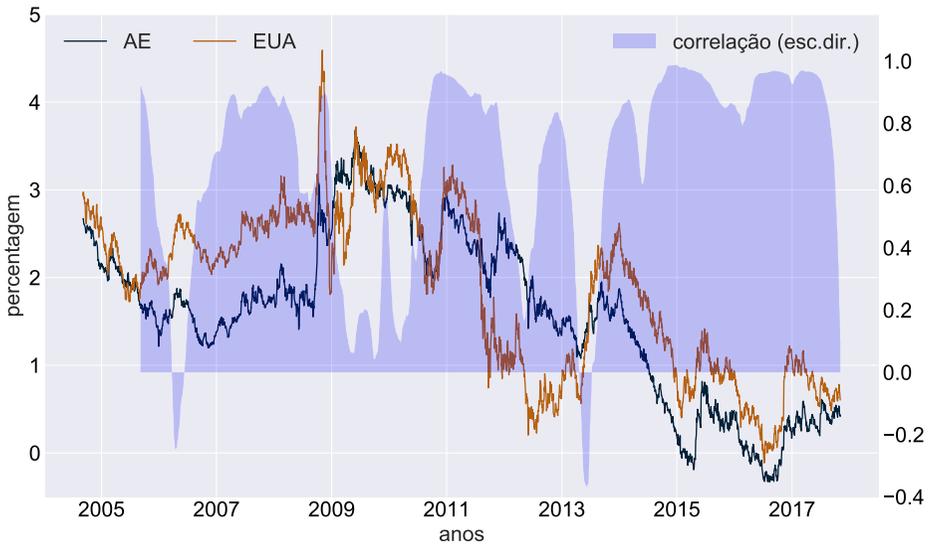
Os parâmetros do modelo são estimados seguindo ACM e usando observações de fim de mês das *yields* de obrigações de cupão zero. Uma vez obtidas as estimativas dos parâmetros, pode-se calcular a decomposição dos

valores ajustados das *yields*  $y_t^{(n)}$  na componente de expectativas  $\tilde{y}_t^{(n)}$  e prémios de maturidade  $TP_t^{(n)}$  para todas as maturidades e em cada momento do tempo. Em particular, com observações diárias dos fatores de risco extraídas como as componentes principais das *yields* de cupão zero diárias, pode-se decompor as *yields* na componente de expectativas e prémios de risco com frequência diária. O gráfico 4 apresenta um exemplo de decomposições diárias das *yields* de obrigações a 10 anos na AE e EUA. Por exemplo, no caso das *yields* da AE, a decomposição sugere que o regresso das *yields* a 10 anos para território positivo no final de 2016 deveu-se na sua totalidade a um aumento do prémio de maturidade, ou seja à compensação exigida pelos investidores por deterem obrigações de prazo mais longo. De facto, as *yields* a 10 anos têm seguido de perto os movimentos nos prémios de maturidade na maior parte do tempo desde 2012, porque a componente de expectativas se manteve relativamente inalterada nesse período. Por outro lado, a componente de expectativas nas *yields* a 10 anos americanas tem vindo a aumentar gradualmente desde 2014. Este aumento nas expectativas das taxas de juro de curto prazo explica em grande medida a divergência verificada entre as *yields* a 10 anos nas duas regiões. Ao mesmo tempo, tal como mostra o gráfico 5, os prémios de maturidade a 10 anos na AE e nos EUA têm apresentado uma evolução semelhante no período amostral. Nas duas regiões os prémios de maturidade atingiram níveis historicamente baixos na segunda metade de 2016. No gráfico apresenta-se também a correlação entre as duas séries numa janela rolante de 250 dias. Na maior parte do período a correlação é positiva e muito forte, frequentemente ultrapassando 0.9.

O uso de correlações pode no entanto ser enganador porque as duas séries não parecem ser estacionárias.<sup>8</sup> Logo, é mais razoável comparar variações nas componentes dos prémios de maturidade dos retornos das respetivas obrigações. O gráfico 6 apresenta as variações nos prémios de maturidade a 10 anos na AE e nos EUA e a correlação entre as duas séries numa janela rolante de 250 dias. Durante a maior parte do período amostral continua a verificar-se que a correlação é positiva e relativamente forte. Este resultado não é específico aos prémios de maturidade a 10 anos. O gráfico 7 mostra um *heat plot* das correlações rolantes entre as variações nos prémios de maturidade na AE e EUA para todas as maturidades até 10 anos. O grau de correlação tende a ser mais forte em maturidades mais longas e é praticamente tão alto como para os prémios a 10 anos para todas as maturidades acima de 6 ou 7 anos. Por outro lado, para maturidades inferiores a 4 anos a correlação tende a ser fraca e em alguns casos até é negativa.

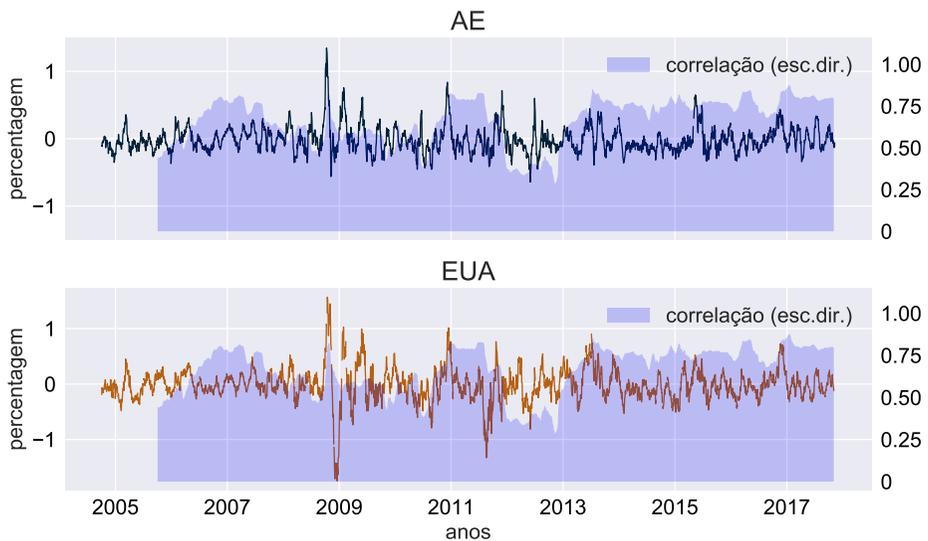
---

8. Esta observação é confirmada por testes formais de raízes unitárias, cujos resultados são apresentadas no Apêndice.



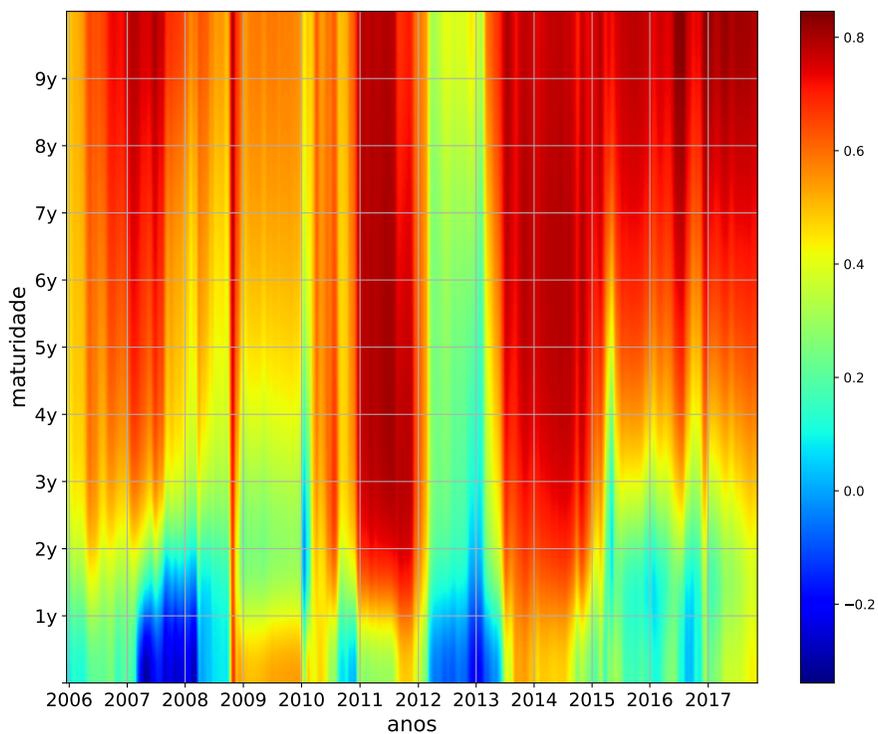
**GRÁFICO 5: Prêmios de maturidade a 10 anos na AE e nos EUA.** O gráfico apresenta os prêmios de maturidade a 10 anos na AE e nos EUA e as correlações entre as duas séries numa janela rolante de 250 dias.

Fontes: BCE, Reserva Federal dos EUA e cálculos do autor.



**GRÁFICO 6: Variações dos prêmios de maturidade a 10 anos na AE e nos EUA.** O gráfico apresenta as variações dos prêmios de maturidade a 10 anos na AE e nos EUA e as correlações entre as duas séries numa janela rolante de 250 dias.

Fontes: BCE, Reserva Federal dos EUA e cálculos do autor.



**GRÁFICO 7: Correlações rolantes entre variações nos prêmios de maturidade na AE e EUA.** O gráfico apresenta as correlações entre variações nos prêmios de maturidade na AE e nos EUA para todas as maturidades até 10 anos.  
Fontes: BCE, Reserva Federal dos EUA e cálculos do autor.

## Deteção e medida da direccionalidade

### *Indicadores*

Os resultados na secção anterior mostram que os prémios de maturidade na AE e EUA estão fortemente correlacionados positivamente, especialmente na parte mais longa da curva de rendimentos. Nesta secção a evidência de direccionalidade nas interações entre as duas variáveis é analisada. Em particular, são estimados três indicadores que são desenhados para detetar e quantificar a força da relação causal entre séries temporais. Os indicadores são a causalidade à Granger, a transferência de entropia e a interligação direccional e são descritos no que se segue.

*Causalidade à Granger.* De uma forma simples a definição de causalidade à Granger é que uma variável  $X$  *causa* uma variável  $Y$  se uma previsão de  $Y$  usando  $X$  é mais precisa do que uma previsão de  $Y$  que não usa  $X$ . Para tornar esta definição operacional é preciso especificar um modelo de previsão para  $Y$  e tipicamente isto é feito usando vetores autoregressivos (VAR) lineares. Para testar a causalidade compara-se a dimensão do erro de previsão do VAR que inclui desfasamentos de  $X$  à dimensão dos erros de um VAR sem esses desfasamentos.

*Transferência de entropia.* O conceito de causalidade à Granger pode ser interpretado em termos do conteúdo de informação, isto é o passado da variável  $X$  conter informação sobre o futuro da variável  $Y$ , informação que não existe no passado da própria variável  $Y$ . Deste ponto de vista, pode-se definir um modelo mais flexível, isto é não linear, para prever  $Y$  bem como usar uma medida de informação mais geral do que a redução da variância do erro de previsão que está na base da abordagem tradicional para testar causalidade à Granger. Isto é basicamente o que o conceito de transferência de entropia tenta fazer.<sup>9</sup> A quantidade de informação de  $X$  para  $Y$  é medida como a redução da incerteza sobre o futuro de  $Y$  usando uma medida independente de um modelo, nomeadamente a entropia da distribuição empírica dos dados.

*Interligação direccional.* Diebold e Yilmaz (2009, 2012, 2015) desenvolveram uma medida de interligação para avaliar o grau e direção da interdependência entre mercados financeiros em diferentes países. A medida baseia-se em

---

9. A entropia de uma variável define-se como menos o valor esperado do logaritmo da distribuição de probabilidade dessa variável. No caso de uma variável com distribuição Normal, a entropia é equivalente à variância dessa distribuição. A transferência de entropia, enquanto medida da quantidade de informação transferida de um processo temporal para outro, foi introduzida por Schreiber (2000)

decomposições de variância estimadas a partir de VAR aplicados a duas ou mais variáveis financeiras. Em particular, a interligação de  $X$  com  $Y$  é determinada pela fração da variância dos erros de previsão de  $Y$  devida a choques sobre  $X$ . A identificação dos choques é conseguida através da abordagem da decomposição de variância generalizada de Pesaran e Shin (1998).

Tal como a medida de causalidade de Granger, a noção de interligação pode ser interpretada em termos do conteúdo de informação, nomeadamente a quantidade de informação adicional sobre os valores futuros de uma variável contida nos choques associados a outra variável. Tal como antes, a informação é quantificada como a redução da incerteza sobre valores futuros da primeira variável. A interligação neste caso não é a informação na segunda variável em si mas está relacionada com o impacto de choques associados a essa variável. Esta interpretação comum sugere que podemos usar a seguinte representação geral de três medidas:

$$I_{X \rightarrow Y} = 100 \times \left( 1 - \frac{\text{Incerteza}(Y|X, Z)}{\text{Incerteza}(Y|Z)} \right) \quad (3)$$

Note-se que ter mais informação não pode aumentar a incerteza. Logo, é sempre verdade que  $\text{Incerteza}(Y|X, Z) \leq \text{Incerteza}(Y|Z)$ . A igualdade quereria dizer que  $X$  não contribui com a informação sobre  $Y$  quando  $Z$  é observado. Nesse caso,  $I_{X \rightarrow Y} = 0$ . No outro extremo, poder-se-ia ter  $\text{Incerteza}(Y|Z) > \text{Incerteza}(Y|X, Z) = 0$ , o que significa que observar  $X$  e  $Z$  é equivalente a observar também  $Y$ . Nesse caso tem-se que  $I_{X \rightarrow Y} = 100$ .

Quer no caso da causalidade à Granger quer no caso da transferência de entropia,  $Y$  representa os valores futuros de uma variável observada, por exemplo o prémio de maturidade a 10 anos na AE,  $X$  representa os valores passados da outra variável observada, isto é o prémio maturidade a 10 anos nos EUA e  $Z$  representa os valores passados da primeira variável observada – o prémio de maturidade a 10 anos na AE. Em ambos os casos o valor do indicador mostra a redução de incerteza sobre valores futuros do prémio de maturidade a 10 anos na AE como resultado da observação dos valores passados do prémio de maturidade a 10 anos nos EUA, comparado a usar apenas os valores passados do prémio de maturidade a 10 anos na AE. A diferença entre estes dois indicadores está na forma de estimação da incerteza – usando um modelo VAR e usando a variância do erro de previsão no caso da causalidade à Granger, e com o estimador não paramétrico da entropia – no caso da transferência de entropia. Na medida de interligação direta,  $Y$  é novamente os valores futuros de uma variável observada – o prémio de maturidade a 10 anos na AE – mas  $X$  representa os valores futuros do choque associado à outra variável, isto é o prémio de maturidade a 10 anos nos EUA, enquanto  $Z$  representa os valores passados das variáveis observada, os prémios de maturidade a 10 anos na AE e nos EUA.

## Resultados

As medidas de direccionalidade são estimadas usando quer a amostra completa quer amostras numa janela rolante. Os resultados com base na amostra completa são apresentados na quadro 2. Duas das medidas – a causalidade à Granger e a interligação direccional – indicam um impacto causal mais forte de variações dos prémios de risco dos EUA para a AE. A transferência de entropia mostra a relação inversa, isto é a AE tem maior impacto. De acordo com todas as medidas a relação causal de uma área sobre a outra é relativamente fraca.

	<i>AE → EUA</i>	<i>EUA → AE</i>
Causalidade à Granger	1.6	2.9
Transferência de entropia	4.4	3.6
Interligação direccional	4.4	9.0

QUADRO 2. **Indicadores estáticos da influência direccional.** Os valores representam a redução percentual da incerteza sobre valores futuros numa área, devido à informação de *yields* passadas (no caso da causalidade à Granger e da transferência de entropia) ou choques futuros (no caso da interligação direccional) da outra área.

O período amostral é de 7 de setembro de 2004 a 31 de outubro de 2017

Fonte: Cálculos do autor.

Para perceber como o grau de causalidade muda ao longo do tempo, procede-se a uma análise em janelas rolantes de 250 dias. Os resultados estão apresentados na gráfico 8 e mostram que a força da relação causal muda ao longo do tempo, sendo em alguns períodos o impacto na AE maior e em outros é a influência dos EUA que domina. Em particular, todas as três medidas são consistentes ao sugerirem que a AE tem um impacto mais forte nos EUA durante o período de 2011 a 2013, enquanto desde meados de 2013 até à segunda metade de 2014 o grau de causalidade dos EUA sobre a AE é mais forte. As medidas de causalidade à Granger e interligação direccional também indicam que a influência dos EUA domina a da EA no início da amostra – de 2006 até 2008. No caso da transferência de entropia, a AE tem um impacto um pouco mais forte durante esse período.

De uma forma geral, e com poucas exceções, a medida de transferência de entropia sugere um grau de relação causal relativamente semelhante em ambas as áreas, enquanto as outras duas medidas apresentam vários períodos onde a influência de uma das áreas claramente domina. Ao mesmo tempo, todas as três medidas apresentam um impacto causal relativamente fraco de qualquer das áreas para a outra. Em termos de transferência de informação, há uma quantidade relativamente pequena de informação única em qualquer das séries que ajuda a prever os desenvolvimentos futuros na outra. Logo, uma das razões para o comovimento forte entre as séries tem de ser que ambas

são influenciadas por um ou mais fatores globais. Por exemplo, os fatores internacionais que levam a incerteza sobre a inflação futura vão também afetar os prêmios de maturidade em diferentes mercados. A evidência empírica que liga a inclinação negativa dos prêmios de maturidade internacionais à redução da incerteza sobre a inflação é discutida por Wright (2011).

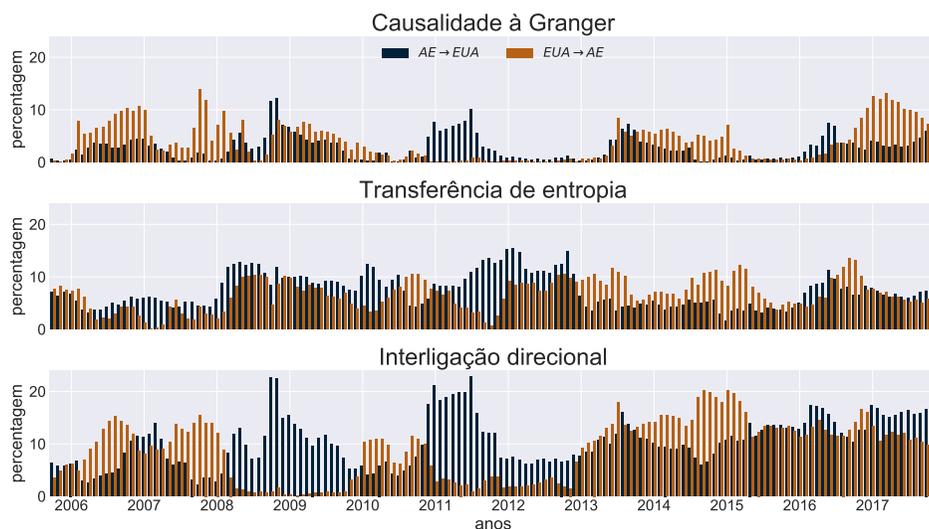


GRÁFICO 8: **Indicadores dinâmicos de influência direcional.** O gráfico mostra as estimativas dos indicadores numa janela rolante de 250 dias. Os valores representam a redução percentual da incerteza sobre as *yields* futuras de uma área, devido à informação sobre *yields* passadas (no caso da causalidade à Granger e transferência de entropia) ou choques futuros (no caso de interligação direcional) da outra área. Fontes: BCE, Reserva Federal dos EUA e cálculos do autor.

### Considerações finais

Este artigo investigou a dinâmica dos prêmios de maturidade em obrigações da AE e EUA. Os resultados apontam para um comovimento forte entre o prêmio de maturidade, especialmente na parte longa da curva de rendimentos, quer em termos dos níveis quer das variações das duas séries. Uma análise adicional da potencial relação causal entre os prêmios de maturidade de obrigações revela que apenas uma pequena parte da dinâmica conjunta pode ser atribuída a uma região influenciar a outra. Esta parte da análise foi baseada em vários indicadores que, ao contrário de medidas de comovimento como correlações, não são simétricas e fornecem informação sobre a direção da causalidade. Enquanto todos os indicadores sugerem a existência de ligações causais entre os prêmios de maturidade na AE e nos EUA que variam ao longo do tempo, estas são relativamente fracas. Dada

esta evidência, uma explicação mais plausível sobre o forte comovimento é que existe um fator global que afeta os prêmios de maturidade em ambas as regiões.

## Referências

- Adrian, Tobias, Richard K. Crump, e Emanuel Moench (2013). "Pricing the term structure with linear regressions." *Journal of Financial Economics*, 110(1), 110–138.
- Campbell, John Y e Robert J Shiller (1991). "Yield spreads and interest rate movements: A bird's eye view." *The Review of Economic Studies*, 58(3), 495–514.
- Diebold, Francis X e Kamil Yilmaz (2009). "Measuring financial asset return and volatility spillovers, with application to global equity markets." *The Economic Journal*, 119(534), 158–171.
- Diebold, Francis X e Kamil Yilmaz (2012). "Better to give than to receive: Predictive directional measurement of volatility spillovers." *International Journal of Forecasting*, 28(1), 57–66.
- Diebold, Francis X e Kamil Yilmaz (2015). *Financial and Macroeconomic Connectedness: A Network Approach to Measurement and Monitoring*. Oxford University Press, USA.
- Fama, Eugene F e Robert R Bliss (1987). "The information in long-maturity forward rates." *The American Economic Review*, pp. 680–692.
- Fisher, Irving (1896). *Appreciation and Interest: A Study of the Influence of Monetary Appreciation and Depreciation on the Rate of Interest with Applications to the Bimetallic Controversy and the Theory of Interest*, vol. 11. American Economic Association.
- Gürkaynak, Refet S, Brian Sack, e Jonathan H Wright (2007). "The US Treasury yield curve: 1961 to the present." *Journal of Monetary Economics*, 54(8), 2291–2304.
- Litterman, Robert B e Jose Scheinkman (1991). "Common factors affecting bond returns." *The Journal of Fixed Income*, 1(1), 54–61.
- Lutz, Friedrich A (1940). "The structure of interest rates." *The Quarterly Journal of Economics*, 55(1), 36–63.
- Mankiw, N Gregory, Lawrence H Summers, et al. (1984). "Do Long-Term Interest Rates Overreact to Short-Term Interest Rates?" *Brookings Papers on Economic Activity*, 15(1), 223–248.
- Pesaran, H Hashem e Yongcheol Shin (1998). "Generalized impulse response analysis in linear multivariate models." *Economics letters*, 58(1), 17–29.
- Schreiber, Thomas (2000). "Measuring information transfer." *Physical review letters*, 85(2), 461.
- Svensson, Lars EO (1994). "Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994." Tech. rep., National Bureau of Economic Research.
- Wright, Jonathan H (2011). "Term premia and inflation uncertainty: Empirical evidence from an international panel dataset." *The American Economic Review*, 101(4), 1514–1534.

### Apêndice: Modelo gaussiano da estrutura temporal das taxas de juro do tipo *affine*

Modelos da estrutura temporal do tipo *affine* modelizam as *yields* de obrigações soberanas de cupão zero como funções de um vetor de variáveis  $X_t$ , denominadas fatores de risco ou preço e que se assumem seguir um vetor autoregressivo (VAR(1)) Gaussiano:

$$X_t = \mu + \Phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad v_t \sim N(0, \Sigma) \quad (\text{A.1})$$

Seja  $P_t^{(n)}$  o preço de uma obrigação de cupão zero com maturidade  $n$  no momento  $t$ . Assumir que não existem possibilidades de arbitragem leva à existência de um *kernel* de preços  $M_t$  tal que

$$M_t = E_t \left( M_{t+1} P_{t+1}^{(n-1)} \right) \quad (\text{A.2})$$

Assuma-se que o *kernel* de preço é exponencialmente *affine*, isto é:

$$M_t = \exp \left( -r_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \Sigma^{-1/2} v_{t+1} \right) \quad (\text{A.3})$$

onde  $r_t = -\ln(P_t^{(1)})$  é a taxa de um período continuamente composta e  $\lambda_t$  são os preços de mercado do risco. Assume-se que quer  $r_t$  quer  $\lambda_t$  são funções do tipo *affine* dos fatores de preço

$$r_t = \delta_0 + \delta_1 X_t \quad (\text{A.4})$$

$$\lambda_t = \Sigma^{-1} (\lambda_0 + \lambda_1 X_t) \quad (\text{A.5})$$

Denote-se com  $rx_{t+1}^{(n-1)}$  o logaritmo do retorno em excesso de deter uma obrigação que chega à maturidade em  $n$  períodos:

$$rx_{t+1}^{(n-1)} = \ln P_{t+1}^{(n-1)} - \ln P_t^{(n)} - r_t \quad (\text{A.6})$$

ACM mostra que se  $\{rx_{t+1}, v_{t+1}\}$  são conjuntamente normalmente distribuídas então

$$E_t \left( rx_{t+1}^{(n-1)} \right) = \beta^{(n-1)} (\lambda_0 + \lambda_t X_t) - \frac{1}{2} var \left( rx_{t+1}^{(n-1)} \right) \quad (\text{A.7})$$

onde  $\beta^{(n-1)} = cov \left( rx_{t+1}^{(n-1)}, v_{t+1}' \right) \Sigma^{-1}$ . Para além disso, o processo gerador de retorno para o logaritmo do excesso é

$$\begin{aligned} rx_{t+1}^{(n-1)} &= \beta^{(n-1)} (\lambda_0 + \lambda_t X_t) - \frac{1}{2} \left( \beta^{(n-1)'} \Sigma \beta^{(n-1)} + \sigma^2 \right) \\ &+ \beta^{(n-1)'} v_{t+1} + e_{t+1}^{(n-1)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde  $e_{t+1}^{(n-1)}$  é um erro do preço do retorno que se assume segue um processo i.i.d. com média 0 e variância  $\sigma^2$ . A equação acima pode ser escrita de uma

forma conjunta para todo o  $t$  e  $n$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{rx} &= \beta(\lambda_0 \iota_T + \lambda_t X_-) - \frac{1}{2} (\mathbf{B}^* \text{vec}(\Sigma) + \sigma^2 \iota_N) \iota_T' \\ &+ \beta' V + E \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde  $\mathbf{rx}$  é uma matriz  $N \times T$  de retornos em excesso,  $\beta$  é uma matriz  $K \times N$  de *loadings* de fatores,  $\iota_T$  e  $\iota_N$  são vetores de 1 com dimensão  $T$  e  $N$ ,  $X_- = [X_0, X_1, \dots, X_{T-1}]$  é uma matriz  $K \times T$  de fatores de preço,  $\mathbf{B}^* = [\text{vec}(\beta^{(1)} \beta^{(1)'})', \dots, \text{vec}(\beta^{(N)} \beta^{(N)'})']$  é uma matriz  $N \times K^2$ ,  $V$  é uma matriz  $K \times T$  e  $E$  é uma matriz  $N \times T$ .

### A.1. Estimaco

ACM mostra que os parâmetros do modelo podem ser obtidos através de uma série de regresses lineares. Primeiro é estimada a equaco (A.1) através do método dos Mínimos dos Quadrados Ordinários. As inovaes estimadas  $\hat{v}_t$  são reunidas numa matriz  $\hat{V}$  que é usada como regressor na estimaco da forma reduzida de (A.9) através do Método dos Mínimos dos Quadrados Ordinários:

$$\mathbf{rx} = \mathbf{a} \iota_T' + \mathbf{c} X_- + \beta' V + E \quad (\text{A.10})$$

Usando as restries que a equaco (A.9) impe sobre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{c}$  na equaco acima dá-nos as seguintes estimativas dos parâmetros de risco  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$ :

$$\hat{\lambda}_0 = (\hat{\beta} \hat{\beta}')^{-1} \hat{\beta} \left( \hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}^* \text{vec}(\hat{\Sigma}) + \hat{\sigma}^2 \iota_N) \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{\lambda}_1 = (\hat{\beta} \hat{\beta}')^{-1} \hat{\beta} \hat{\mathbf{c}} \quad (\text{A.12})$$

onde  $\hat{\sigma}^2$  é calculado usando os resíduos estimados de (A.10). Por fim são estimados os parâmetros da taxa curta  $\delta_0$  e  $\delta_1$  através de uma regresso dos Mínimos dos Quadrados ordinários (A.4).

### A.2. Prmio de maturidade

A estrutura *affine* do modelo implica que a *yield* continuamente composta duma obrigao de cupo zero com  $n$  períodos no momento  $t$ , definida como  $y_t^{(n)} = -\frac{1}{n} \log P_{t,n}$ , é dada por

$$y_t^{(n)} = -\frac{1}{n} (A_n + B_n' X_t) \quad (\text{A.13})$$

onde os parâmetros  $A_n$  e  $B_n$  são derivados recursivamente usando o seguinte sistema de equações:

$$A_n = A_{n-1} + B'_{n-1}(\mu - \lambda_0) + \frac{1}{2}(B'_{n-1}\Sigma B'_{n-1} + \sigma^2) - \delta_0 \quad (\text{A.14})$$

$$B'_n = B'_{n-1}(\Phi - \lambda_1) - \delta'_1 \quad (\text{A.15})$$

$$A_0 = 0, \quad B_0 = \mathbf{0} \quad (\text{A.16})$$

A *yield* em (A.13) inclui a compensação pelo risco exigida por investidores avessos ao risco para investirem em obrigações de prazo mais longo em vez de reinvestirem numa série de obrigações de curto prazo. Ou seja, pode-se decompor as *yields* derivadas do modelo numa componente de expectativas e um prémio de risco:

$$y_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} E_t r_{t+j} + TP_t^{(n)} \quad (\text{A.17})$$

onde o primeiro termo representa a *yield* neutra ao risco, definida como a *yield* que seria exigida por investidores que são neutros ao risco. Para obter a *yield* neutra ao risco fixam-se os parâmetros de preço do risco  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  para zero e usam-se as recursões em (A.14) e (A.15) para derivar os parâmetros ajustados de risco  $\tilde{A}_n$  e  $\tilde{B}_n$ . As *yields* neutras ao risco são calculadas usando:

$$\tilde{y}_t^{(n)} = -\frac{1}{n} (\tilde{A}_n + \tilde{B}'_n X_t) \quad (\text{A.18})$$

O prémio de maturidade é obtido por diferença entre a *yield* derivada do modelo e a neutra ao risco

$$TP_t^{(n)} = y_t^{(n)} - \tilde{y}_t^{(n)} \quad (\text{A.19})$$

### A.3. Testes de raízes unitárias

	AE		EUA	
	nível	dif.	nível	dif.
Teste Dickey-Fuller GLS	-0.18 (-1.95)	-6.83 (-1.95)	-0.77 (-1.95)	-6.97 (-1.95)
Teste Phillips-Perron	-1.75 (-3.41)	-9.04 (-3.41)	-3.03 (-3.41)	-9.44 (-3.41)

#### QUADRO A.1. Testes de raízes unitárias no nível e diferenças do prémio de maturidade a 10 anos na AE e EUA.

A hipótese nula em ambos os testes é que o processo contém uma raiz unitária. O quadro mostra os valores das estatísticas de teste e os respetivos valores críticos a 5% (entre parêntesis).

Fonte: Cálculos do autor.