

Compras de ativos em larga escala pelo banco central e realocação do risco

Bernardinho Adão
Banco de Portugal

Alberto López Martín
ISEG, U. Lisboa

Julho 2023

Resumo

As crises têm algumas características comuns: aumento do prémio de risco, queda da taxa de juro real sem risco, e fuga para ativos de qualidade, entre outras. Este estudo analisa os efeitos das compras de ativos em larga escala sobre o preço de mercado do risco e a taxa de juro sem risco. Observamos que quando o banco central se financia através da emissão de dívida sem risco para comprar ativos com risco, há uma redução do risco na economia, uma vez que o risco é transferido para os agentes que não participam no mercado. As compras em grande escala de ativos pelo banco central reduzem a exposição dos balanços dos intermediários a choques de capital, levando a uma redução do prémio de risco e a um aumento da taxa de juro sem risco. (JEL: E21, E60, F40)

1. Introdução

Em recessões, o prémio de risco aumenta e a taxa de juro real sem risco diminui. Abaixo apresentamos gráficos que ilustram estes fatos estilizados. O gráfico 1 mostra a evolução do TED spread, que é definido como a diferença entre a taxa de juro nos empréstimos interbancários e a taxa de juro da dívida a 3 meses ("T-Bills") do governo dos Estados Unidos. O TED spread é um indicador do risco de crédito na economia, uma vez que os T-bills são considerados terem um risco pequeno, enquanto a LIBOR reflete o risco de crédito dos empréstimos aos bancos comerciais. Um aumento no TED spread é um sinal de que os credores acreditam que o risco de incumprimento nos empréstimos interbancários é maior. Isto é, os credores interbancários exigem uma taxa de juro mais alta nos empréstimos ou aceitam remunerações menores em investimentos seguros, como os T-bills.

Outra medida do prémio de risco é a diferença entre a taxa de rentabilidade dum ativo com risco elevado, como um título do Tesouro de longo prazo, e a taxa de rentabilidade dum ativo com risco baixo, como um título do Tesouro de curto prazo. O gráfico 2 mostra a evolução da diferença entre a taxa de rentabilidade da dívida do

Nota: As análises, opiniões e conclusões aqui expressas são da exclusiva responsabilidade dos autores e não refletem necessariamente as opiniões do Banco de Portugal ou do Eurosistema.

E-mail: badao@bportugal.pt;



GRÁFICO 1: **TED spread: 3M USD LIBOR – 3M Treasury Bill**

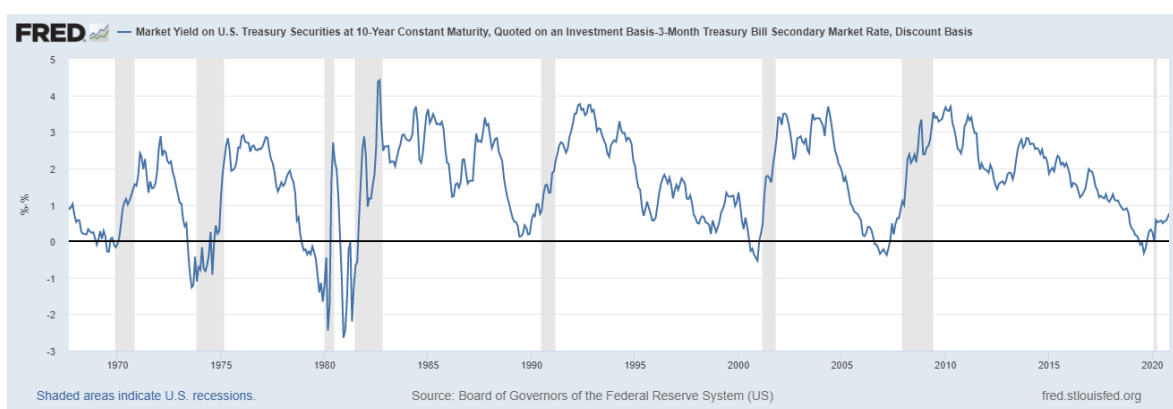


GRÁFICO 2: **10Y Treasury yield – 3M Treasury Bill**

Tesouro a 10 anos e da T-Bill a 3 meses. De acordo com o gráfico essa variável aumenta em períodos de recessões.

A taxa de juro real sem risco diminui nas recessões. O gráfico 3 mostra a evolução da taxa de juro real sem risco medida como a diferença entre a taxa da T-bill a 3 meses e um indicador de inflação esperada, como o obtido através do Sticky Price Consumer Price Index. O Sticky Price Consumer Price Index é um índice de preços para um subconjunto de bens e serviços incluídos no IPC que mudam de preço com menos frequência. Acredita-se que a evolução dos preços desses bens e serviços dão uma informação mais precisa das expectativas da inflação futura do que a evolução do IPC que inclui também bens e serviços cujos preços mudam com mais frequência. Ver: Bryan e Meyer (2010).

A crise de 2007-08 exigiu que os bancos centrais de todo o mundo expandissem a sua caixa de ferramentas de política monetária na tentativa de aliviar as condições de crédito e comprimir os prémios de risco. O choque de 2007-08, associado à crise da dívida soberana que se seguiu, conduziu as economias a situações em que os instrumentos convencionais de política monetária não conseguiram suportar uma recuperação económica sustentada. As regras de Taylor recomendariam cortar as taxas de juros nominais bem abaixo de zero, mas isso não foi possível devido ao limite inferior da taxa de juro nominal. Além disso, perto do limite inferior, a relação funcional entre

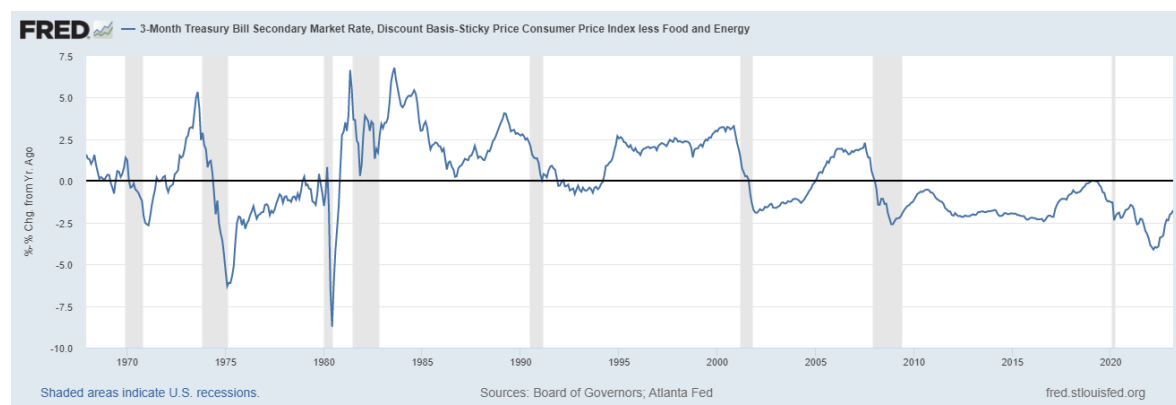


GRÁFICO 3: 3M T-bill – inflação do IPC (sem alimentação e energia)

variações nas taxas de juro oficiais e as restantes taxas de juro do mercado é muito incerta.

A flexibilização quantitativa (quantitative easing) e a compra de grandes quantidades de ativos financeiros tornaram-se ferramentas importantes das autoridades monetárias em virtude do limite inferior nas taxas de política. Ao reduzir a oferta ao setor privado de ativos com risco (por exemplo, devido ao seu longo prazo de vencimento) e aumentar a oferta de ativos de menor risco (por exemplo, reservas bancárias), os bancos centrais esperavam reduzir as taxas de juro nos mercados de longo prazo, e assim canalizar mais empréstimos para consumidores e empresas. As compras de ativos com risco assumiram diversas formas: títulos do Tesouro de longo prazo, títulos privados, e ações de instituições financeiras, entre outras. Além disso, os bancos centrais forneceram recursos a agentes que normalmente não têm acesso ao dinheiro do banco central, como emissores de papel comercial, fundos do mercado monetário e agências governamentais emissoras de títulos com garantias hipotecárias, entre outros. Todos os bancos centrais das economias avançadas implementaram este tipo de medidas em diferentes proporções para mitigar os efeitos da crise financeira global de 2008.

As políticas monetárias não convencionais conduzidas em resposta à crise de 2008 continuaram a ser usadas em vários graus até a recente crise pandêmica em 2020. Refletindo os programas de compra líquida de ativos em vigor, isso levou a um aumento substancial do balanço dos bancos centrais. O gráfico 4 apresenta a evolução dos balanços do Eurosistema, da FED e do BoJ (em valores absolutos e em percentagem do PIB) nas últimas décadas.

A contribuição deste estudo é teórica. Consideramos um modelo simples que se baseia no modelo com agentes heterogêneos introduzido por Brunnermeier e Sannikov (2017), que, por sua vez, segue Basak e Cuoco (1998), para desvendar alguns dos efeitos macro das medidas não convencionais de política monetária. Em particular, mostramos como a política monetária não convencional afeta o prêmio de risco e a taxa de juro sem risco.

Consideramos uma economia com dois tipos de agentes racionais: uns designamos por especialistas financeiros, com o know-how necessário para acumular um ativo de risco (capital), e os outros designamos por famílias, que compram a dívida sem risco

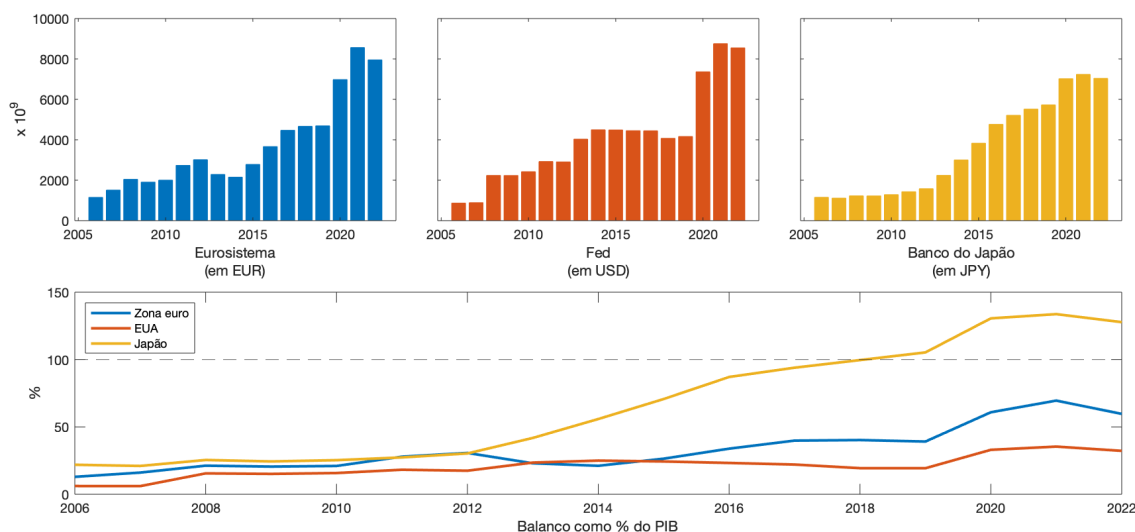


GRÁFICO 4: Balanços do Eurosistema, do FED e do BoJ

emitida pelos especialistas. Os fundos obtidos com a emissão desta dívida sem risco são usados pelos especialistas para comprar os ativos com risco. Além disso, existe um banco central. O banco central redistribui o risco na economia emitindo títulos sem risco para comprar capital, e transferindo dividendos (via Tesouro) para as famílias.

Ao resolver este modelo, obtemos expressões analíticas para a taxa de juro sem risco e para a evolução da riqueza relativa do setor especialista. A partir destas expressões mostramos que um choque negativo no capital dos intermediários reduz a sua capacidade de comprar ativos com risco e, como consequência, o prémio de risco na economia aumenta. Descrevemos também como, quando o banco central compra ativos com risco e emite dívida sem risco, há uma redução do risco total na economia, uma vez que esse risco é transferido para agentes económicos que não participam no mercado. As compras de ativos realizadas pelo banco central alteram o equilíbrio da economia, levando a uma diminuição do preço de mercado do risco e a um aumento da taxa de juro sem risco.

O resto deste estudo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 revê a literatura relevante. A seção 3 apresenta o modelo, descreve o equilíbrio na economia e explica como a política monetária não convencional afeta o equilíbrio. A seção 4 apresenta as conclusões.

2. Revisão da literatura

Iniciamos esta seção discutindo as razões que podem levar a que o tamanho e a composição do balanço patrimonial do banco central afetem o equilíbrio. Neil Wallace escreveu o artigo pioneiro sobre esta questão com o título "A Modigliani-Miller Theorem for Open-Market Operations". Wallace (1981) estabeleceu, no contexto de um modelo de gerações sobrepostas, que, sob a hipótese de que os mercados são completos, nem o tamanho nem a composição do balanço do banco central afetam o equilíbrio da economia. No seu modelo, o dinheiro serve apenas como reserva de

valor, pois não facilita as transações. Outros autores confirmaram esse resultado em ambientes diferentes ou mais gerais. Peled (1985) estabeleceu que as operações de mercado aberto de moeda e títulos indexados são neutrais no sentido real, apesar de terem características de risco diferentes. Chamley e Polemarchakis (1984) estabeleceu o resultado de Wallace para mercados incompletos. Sargent e Smith (1987) estabeleceu o resultado da neutralidade para uma economia particular onde a moeda tem uma taxa de rentabilidade inferior à dos outros ativos.

O resultado da neutralidade é surpreendente porque as operações de mercado aberto têm sido o principal instrumento da política monetária, e a política monetária é considerada como afetando a economia. De fato, apesar dos objetivos da política monetária terem mudado ao longo do tempo, seja visando o preço das reservas ou os agregados monetários, o principal instrumento continuou a ser sempre o mesmo: as operações de mercado aberto, Bindseil (2014). Assim, o resultado teórico parecia não se aplicar à realidade das operações dos bancos centrais.

Eggertsson e Woodford (2003) explicam a razão porque em geral o resultado da neutralidade Wallace (1981) não se aplica às operações de mercado aberto com reservas. As reservas (e a base monetária em geral) são ativos que têm retornos não pecuniários, pois ajudam a mitigar as fricções nas transações. Ao contrário de outros ativos financeiros, a base monetária fornece serviços de transações, relaxando as restrições que, de outra forma, restringiriam as transações que os detentores do ativo podem realizar.

No entanto, existe uma situação em que a neutralidade de Wallace ainda se mantém mesmo para operações de mercado aberto com reservas. Quando a taxa de juro nominal é zero, deixa de haver escassez de moeda, pois o seu custo de oportunidade é zero. Nesse caso as vantagens não pecuniárias das reservas são nulas, e as operações de mercado aberto com reservas também não deveriam ter efeitos. Assim, dado que desde 2008 até recentemente a taxa nominal de juro tem sido aproximadamente zero, então a estratégia de "flexibilização quantitativa" utilizada durante este período não deveria ter sido eficaz em fornecer estímulo monetário à economia.

O resultado da neutralidade depende da existência de mercados financeiros sem fricções. Nesse caso, o preço de um ativo é igual ao valor presente de seus rendimentos estocásticos futuros, onde o valor presente é calculado usando um fator de desconto estocástico padrão. Por exemplo, numa economia modelo simples, com mercados completos, o fator de desconto estocástico é único e é determinado pela taxa marginal de substituição entre o consumo atual e o consumo nos diferentes estados da natureza futuros. Se as trocas de ativos entre o banco central e o setor privado não alterarem a quantidade real de recursos disponíveis para consumo em cada estado da natureza, a taxa marginal de substituição do consumo nos diferentes estados da natureza também não mudará. Assim, o fator de desconto não mudará e os preços dos ativos não se alterarão porque os seus retornos em cada estado da natureza não mudaram.

Suponhamos, por exemplo, que o banco central decide, através duma operação de mercado aberto, ter uma carteira com mais risco, o que resulta nos investidores privados deterem uma carteira com menos risco. Para tornar as coisas mais concretas, suponhamos que, após a operação de mercado aberto, a carteira do banco central tem uma rentabilidade menor no caso de uma pandemia, enquanto a carteira do setor

privado tem uma rentabilidade semelhante em todos os estados da natureza. Esta mudança na carteira do banco central não faz com que o risco desapareça da economia. A rentabilidade da carteira do banco central será menor no estado com pandemia, e isso implicará que menos dividendos serão distribuídos ao Tesouro, o que por sua vez significa que as transferências deste para o setor privado serão menores naquele estado. Portanto, o rendimento das famílias após as transferências permanecerá inalterado nesse estado e em todos os outros estados da natureza. Isso significa que o fator de desconto estocástico também permanecerá inalterado e, portanto, a operação de mercado aberto não alterará os preços dos ativos.

O resultado da irrelevância do balanço do banco central é mais fácil de provar se houver uma família representativa, mas permanece verdadeiro mesmo que não seja esse o caso. O resultado é verdadeiro mesmo que as famílias sejam heterogêneas, elas podem ter diferentes aversões ao risco, diferentes perfis temporais de rendimentos, diferentes tipos de risco de rendimento que os mercados não cobrem, etc. A suposição crucial, como Chamley e Polemarchakis (1984), Cúrdia e Woodford (2011), d'Avernas *et al.* (2019) e Silva (2020) mostram, é todos os investidores poderem comprar ou vender quantidades arbitrárias dos mesmos ativos aos mesmos preços.

Sob esta hipótese, se o banco central fizer uma operação de mercado aberto que mude o rendimento contingente (ao estado) das famílias, então as famílias devem querer negociar nos mercados financeiros para desfazer os efeitos da operação do banco central. Suponhamos que uma parcela x_h do rendimento da carteira do banco central é distribuída, pelo Tesouro, à família h . Se o banco central decidir, por meio de uma operação de mercado aberto, manter uma carteira com mais risco, o que implica os investidores privados deterem uma carteira com menos risco, então a família h deve querer refazer a sua carteira de ativos de modo a anular exatamente a fração x_h da operação do banco central, e assim garantir o fluxo de consumo contingente (ao estado) que ela tinha antes da intervenção do banco central.

A noção relevante da riqueza das famílias é a soma da sua carteira e o valor presente das transferências futuras descontadas do banco central para as famílias, via Tesouro. Assim, a exposição relevante ao risco das famílias inclui tanto o risco financeiro da sua carteira como o risco associado à carteira do banco central, e transmitido às famílias através das transferências. Se, através duma operação de mercado aberto, o banco central aumentar a sua exposição aos ativos com maior risco, as famílias têm um incentivo para reduzir sua própria exposição ao risco, de modo a manter constante sua exposição total ao risco. Se a sua exposição total ao risco não mudar, os preços dos ativos e as variáveis macroeconômicas também não mudarão. Este resultado é mais fácil de provar com mercados completos, mas continua a ser verdadeiro em mercados incompletos. O resultado da neutralidade mantém-se desde que as transferências possam ser replicadas (ou desfeitas) refazendo a carteira de ativos financeiros.

Em contraste, a maior parte da literatura empírica parece concluir que a "flexibilização quantitativa" teve efeitos sobre as economias.¹ Existem muitos trabalhos

1. Para uma interpretação cética da evidência, pode-se consultar Stroebel e Taylor (2012) e Taylor (2009).

empíricos que estudam os efeitos de compras em grande escala de ativos para diferentes jurisdições. Krishnamurthy e Vissing-Jorgensen (2011) avalia o efeito dos programas de flexibilização quantitativa do Federal Reserve sobre as taxas de juros. Segundo os autores, a influência do Fed foi maior sobre os prêmios de risco dos ativos alvos dos programas. Por exemplo, o QE1 (2008-09) teve um grande efeito na redução das taxas dos empréstimos hipotecários, em parte devido ao fato de que o QE1 envolveu grandes compras de títulos garantidos por hipotecas (MBS) de certas agências. Por sua vez, o QE2 (2010-11), que envolveu apenas compras de títulos do Tesouro, impactou principalmente as taxas das obrigações do Tesouro, e menos os MBS e as taxas das obrigações das empresas privadas.

Foi também desenvolvido trabalho na identificação de diferentes canais através dos quais os LSAPs transmitem os seus efeitos à economia real Kojen *et al.* (2017); Krishnamurthy e Vissing-Jorgensen (2011); Vayanos e Vila (2021). Krishnamurthy *et al.* (2017) estudaram o efeito dos programas do Banco Central Europeu (BCE), ou seja, o Programa de Mercados de Títulos (SMP), a estrutura Outright Monetary Transactions (OMT) e as operações de refinanciamento de longo prazo (LTROs). O seu interesse centrou-se nos canais pelos quais o SMP e o OMT afetaram os rendimentos dos títulos soberanos dos chamados países GIIPS, bem como no rendimento das ações. Vários outros autores também estudaram o efeito dos programas LSAP sobre os empréstimos bancários ao setor privado (Andrade *et al.* (2015); Carpinelli e Crosignani (2017); Fonseca *et al.* (2015); Garcia-Posada e Marchetti (2016)). Estudos empíricos também foram realizados para avaliar o efeito do QE em diferentes tipos de ativos (De Santis e Zaghini (2021); Albertazzi *et al.* (2021); Balcilar *et al.* (2020); Farinha e Vidrago (2021); Lewis e Roth (2019); Guo *et al.* (2020)).

Com fricções financeiras, o resultado da neutralidade de Wallace não se verifica. Uma simples modificação do modelo assumida por muitos autores, como Chamley e Polemarchakis (1984), Cúrdia e Woodford (2011), d’Avernas *et al.* (2019) e Silva (2020), é assumir que os mercados financeiros são segmentados. Esses autores assumem que os investidores são heterogêneos, ou seja, nem todos os investidores têm oportunidades iguais de investir em todos os ativos nas mesmas condições. Pode ser que apenas alguns especialistas tenham o conhecimento necessário para investir em alguns ativos ou, por lei, que alguns agentes não tenham acesso a um determinado mercado: por exemplo, os “shadow-banks” não têm acesso às reservas do banco central. Assim, quando o banco central compra um dado ativo, as transferências do banco central para os investidores, via Tesouro, têm mais risco de rendimento que está correlacionado com os retornos daquele ativo específico. Os investidores podem querer ter menos desse risco, mas como não têm esse ativo na sua carteira e não podem vender a descoberto, isso não é possível.

O nosso modelo, assume que nem todos os participantes no mercado financeiro podem negociar o mesmo conjunto de instrumentos financeiros ao mesmo custo. Assumimos que alguns participantes não têm a experiência necessária para conceder crédito diretamente às empresas, pelo que têm de depositar os seus fundos em intermediários competitivos que, por sua vez, oferecem empréstimos às empresas. Ao realizar operações de mercado aberto, o banco central pode conceder crédito a empresas e emitir dívida sem risco. Como os choques afetam a riqueza relativa dos intermediários,

eles afetam o investimento e a oferta de ativos com risco na economia. O banco central pode modificar o risco na economia comprando o ativo com risco, emitindo o ativo sem risco e canalizando os dividendos associados ao ativo com risco para os agentes que não participam ao mercado.

3. O modelo

O nosso modelo baseia-se no modelo de Brunnermeier e Sannikov (2017) que por sua vez é baseado no artigo de Basak e Cuoco (1998). O modelo original estuda a dinâmica de equilíbrio de uma economia com fricções financeiras e o efeito da desintermediação financeira em situações de crise. O modelo é uma economia de horizonte infinito com produção, agentes heterogêneos e fricções financeiras. Modificamos o modelo original introduzindo um banco central que faz política monetária não convencional. Além do banco central, existem dois outros tipos de agentes: especialistas financeiros e famílias. Existe um continuum (com massa um) de cada tipo de agente. A tecnologia de produção usa capital para produzir bens finais e há custos de ajustamento do investimento. Existe um ativo com risco e um ativo sem risco. Os mercados financeiros são segmentados, apenas os especialistas e o banco central podem negociar o ativo com risco. O banco central e os especialistas financiam as suas compras do ativo com risco emitindo obrigações sem risco que são compradas pelas famílias. A política monetária não convencional consiste em comprar capital com o rendimento obtido com a emissão de obrigações, e transferir para as famílias os lucros (ou perdas) associados a esta operação.

As transferências devem ser interpretadas como sendo feitas via Tesouro após o recebimento dos dividendos do banco central. Para simplificar a análise, supõe-se que essas transferências são recebidas integralmente pelas famílias, mas os resultados qualitativos permanecem inalterados se em vez disso assumirmos que as famílias apenas recebem uma fração dessas transferências. Quanto maior for a fração das transferências recebidas pelas famílias, maior será o efeito quantitativo da política monetária não convencional sobre a taxa de juro sem risco e sobre o prémio de risco.

A hipótese de que as famílias não podem participar do mercado de ativos com risco é uma suposição extrema que simplifica a análise. No entanto, para que a política não convencional tenha efeitos na economia basta que as famílias tenham acesso limitado ao mercado de ativos com risco, seja por não possuírem os conhecimentos necessários ou por falta de informação relevante. É importante que a atuação dos agentes que recebem as transferências do banco central seja restrita, para que esses agentes não possam desfazer o efeito da política não convencional do banco central. Por exemplo, se as famílias pudessem negociar sem quaisquer restrições o ativo com risco, elas escolheriam uma carteira eficiente. Nesse caso, sempre que houvesse uma operação de mercado aberto, as famílias desejariam alterar sua carteira, de forma que o rendimento estocástico da nova carteira juntamente com as transferências do banco central fosse igual ao rendimento estocástico da carteira original.

3.1. Especialistas financeiros

Os especialistas têm uma função produção de rendimentos constantes à escala

$$Y_t = Ak_t, A > 0. \quad (1)$$

O stock de capital evolui de acordo com a equação:

$$\frac{dk_t}{k_t} = (\Phi(\iota_t) - \delta)dt + \sigma dZ_t, \quad (2)$$

onde ι_t é a taxa de investimento, e a função investimento Φ satisfaz as hipóteses usuais: $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 1$, $\Phi' > 0$, e $\Phi'' < 0$. A concavidade de Φ reflete custos de ajustamento do capital. A tecnologia de investimento Φ transforma $\iota_t k_t$ unidades de output em $\Phi(\iota_t)k_t$ unidades de capital. δ é a taxa de depreciação do capital. O último termo é um choque na taxa de crescimento, que segue um processo Browniano com volatilidade σ . Este termo pode ser interpretado como o risco de deter o capital. É o único choque na economia.

Para financiar as suas compras do ativo com risco, os especialistas emitem títulos não contingentes que são comprados pelas famílias. Seja θ_t , $\theta_t < 0$, a “short position” do especialista na obrigação, r_t a taxa de juro na obrigação, r_t^K a taxa de rentabilidade do capital, c_t^e o consumo do especialista e n_t^e a riqueza do especialista. A equação da evolução da riqueza do especialista é

$$\frac{dn_t^e}{n_t^e} = \left(-\frac{c_t^e}{n_t^e} + \theta_t r_t \right) dt + (1 - \theta_t) dr_t^K. \quad (3)$$

A dinâmica de r_t^K é descrita abaixo em (7). O especialista representativo tem utilidade logarítmica e desconta à taxa $\rho^e \geq 0$ os fluxos de utilidade do consumo futuro c_t^e :

$$\mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-\rho^e \cdot t} \log(c_t^e) dt \right]. \quad (4)$$

O problema do especialista representativo consiste em decidir a taxa de investimento ι_t , o fluxo de consumo c_t^e e a posição em títulos θ_t , de modo a maximizar (4) sujeito à evolução da riqueza em (3) e o valor inicial da riqueza, n_0^e .

O preço do capital, designado por q_t , segue um processo estocástico descrito por:

$$\frac{dq_t}{q_t} = \mu_t^q dt + \sigma_t^q dZ_t, \quad (5)$$

onde o drift e a volatilidade, (μ_t^q, σ_t^q) , são determinados em equilíbrio. A taxa instantânea de retorno sobre o capital é dada por

$$dr_t^K = \frac{A - \iota_t}{q_t} dt + \frac{d(q_t k_t)}{q_t k_t}, \quad (6)$$

onde o primeiro termo representa o rendimento de dividendos e o segundo termo os ganhos de capital. Podemos simplificar esta expressão para obter:

$$dr_t^K = \left(\frac{A - \iota_t}{q_t} + \mu_t^q + \Phi(\iota_t) - \delta + \sigma_t^q \sigma \right) dt + (\sigma_t^q + \sigma) dZ_t, \quad (7)$$

onde $\mu_t^q + \Phi(\iota_t) - \delta + \sigma_t^q \sigma$ indica o ganho de capital esperado e $\sigma_t^q + \sigma$ a volatilidade do rendimento. O termo de volatilidade é o risco total, composto pelo risco fundamental

σ e pelo risco de preço σ_t^q . Por conveniência em cálculos posteriores, indicamos o drift desse processo estocástico por $\mu_t^{r^K}$ e a volatilidade por $\sigma_t^{r^K}$.

Como a medida de especialistas é um, o consumo agregado do setor dos especialistas é $C_t^e = \int_0^1 c_{i,t}^e di$.

3.2. Banco central

O banco central segue a regra de deter uma parcela do stock de capital da economia (que é financiado pela emissão de dívida sem risco), e distribui os dividendos às famílias. Formalmente, se K_t^c é o stock de capital do banco central e K_t o capital agregado da economia então $K_t^c = \varepsilon K_t$, $0 \leq \varepsilon < 1$. Para simplificar a análise, assumimos que o banco central tem riqueza líquida zero. O banco central investe em capital, K_t^c , emitindo títulos sem risco, B_t^c , de modo que $q_t K_t^c = B_t^c$. Esses títulos, B_t^c , pagam a taxa, r_t , que é igual à taxa das obrigações emitidas pelo especialista financeiro. Os rendimentos obtidos com esta carteira são canalizados para famílias como uma transferência global, T_t ,

$$T_t = q_t K_t^c r_t^K - B_t^c r_t = \varepsilon q_t K_t (r_t^K - r_t). \quad (8)$$

3.3. Famílias

A fricção financeira do modelo é a restrição de que as famílias não têm acesso ao mercado de títulos com risco. As famílias não possuem a expertise necessária para deter títulos com risco, mas podem deter obrigações.

A família representativa pode comprar dívida sem risco, que paga uma taxa de juro r_t . Adicionalmente, a família recebe uma transferência, T_t , do banco central e consome, c_t^h . A lei de movimento para a riqueza da família é

$$dn_t^h = (n_t^h r_t - c_t^h) dt + dT_t. \quad (9)$$

As preferências das famílias também são representadas por uma função de utilidade logarítmica

$$\mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-\rho^h \cdot t} \log(c_t^h) dt \right], \quad (10)$$

com $\rho^h \geq 0$.

O problema das famílias consiste em escolher seu fluxo de consumo c_t^h de modo a maximizar (10) sujeito a (9), e a um valor inicial n_0^h .

Como também assumimos que a medida das famílias é um, o consumo agregado das famílias é $C_t^h = \int_0^1 c_{i,t}^h di$.

3.4. Variável de estado

Seja K_t o capital da economia. Se designarmos por K_t^e o capital agregado dos especialistas, então

$$K_t^e = \int_0^1 k_{i,t}^e di, \quad (11)$$

onde $k_{i,t}^e$ indica o stock de capital do i -ésimo especialista. Como o único risco no modelo é agregado, temos que $k_{i,t}^e = k_t^e$. Como o capital é detido pelo setor dos especialistas e

pelo banco central, então

$$K_t = K_t^e + K_t^c.$$

Seja N_t o patrimônio líquido agregado da economia. Então $N_t = q_t K_t$. Sejam N_t^e e N_t^h os níveis de riqueza agregados dos especialistas e das famílias, respectivamente, $N_t = N_t^e + N_t^h$ (lembre-se de que assumimos a riqueza do banco central, N_t^c , é zero). Como não há risco idiossincrático $N_t^e = n_t^e$ e $N_t^h = n_t^h$. Finalmente, definimos a riqueza (relativa) do setor dos especialistas, que tomamos como a variável de estado agregada da economia,

$$\eta_t \equiv \frac{N_t^e}{N_t} = \frac{N_t^e}{q_t K_t}. \quad (12)$$

Como será útil em cálculos posteriores, indicamos o drift do processo estocástico da variável de estado por μ_t^η e a volatilidade por σ_t^η .

Presume-se que as famílias são mais pacientes do que os especialistas financeiros, $\rho^e > \rho^h$, como em Kiyotaki e Moore (1997) para evitar uma distribuição estacionária degenerada do patrimônio líquido relativo dos especialistas. Como veremos mais adiante, se $\rho^e = \rho^h$ então, no longo prazo, η_t converge para um.

3.5. Equilíbrio

Um equilíbrio nesta economia é definido como trajetórias para preço $\{q_t\}$, decisões dos especialistas $\{\iota_t, \theta_t, c_t^e\}$, decisões das famílias $\{c_t^h\}$, decisões do banco central $\{\varepsilon, T_t\}$, e patrimônios líquidos $\{n_t^e, n_t^h\}$ tais que: (i) ambos os agentes maximizam suas funções objetivo, dadas as restrições relevantes, e (ii) todos os mercados estão em equilíbrio.

3.6. O problema do especialista financeiro

A relação entre o preço e o custo de reposição do capital, conhecida na literatura como fórmula q de Tobin, é dada pela condição de primeira ordem em relação ao investimento do problema do especialista

$$\Phi'(\iota_t) = \frac{1}{q_t}. \quad (13)$$

No caso da utilidade logarítmica, o problema do especialista pode ser resolvido analiticamente, e podem-se obter políticas ótimas para o consumo do especialista e para a composição do seu portfólio. A condição de primeira ordem para a escolha do consumo é

$$c_t^e = \rho^e n_t^e. \quad (14)$$

e a condição para a escolha da carteira ótima é

$$(1 - \theta_t) = \frac{\mu_t^{r^K} - r_t}{(\sigma_t^q + \sigma)^2}. \quad (15)$$

A equação (14) diz que o fluxo de consumo é uma parcela constante do patrimônio líquido. A equação (15) diz que a fração do ativo com risco na carteira do especialista é a razão entre o excesso do rendimento esperado e a variância do rendimento. De (15) podemos obter o Sharpe ratio. Este índice é a taxa de rendimento esperado em excesso

da taxa de juro sem risco por unidade de volatilidade ou risco total. Acontece que é igual à volatilidade do património líquido do especialista:

$$\frac{\mu_t^{r^K} - r_t}{\sigma_t^{r^K}} = \frac{\frac{A - \iota_t}{q_t} + \mu_t^q + \Phi(\iota_t) - \delta + \sigma_t^q \sigma - r_t}{\sigma_t^q + \sigma} = \sigma_t^{n^e}. \quad (16)$$

3.7. O problema da família

Da condição de primeira ordem do problema da família derivamos a escolha de consumo,

$$c_t^h = \rho^h n_t^h. \quad (17)$$

O fluxo de consumo é uma parcela constante do património líquido.

3.8. Caracterização do equilíbrio

Para resolver o modelo, precisamos especificar as funções. Começamos especificando a função de investimento. Assumimos a função de investimento:

$$\Phi(\iota_t) = \frac{1}{\varphi} \log(\varphi \iota_t + 1), \quad (18)$$

onde φ é um parâmetro do custo de ajustamento do capital.² Da solução para o problema do especialista (13), obtemos a taxa de investimento ótima como sendo

$$\iota_t = \frac{q_t - 1}{\varphi}. \quad (19)$$

Utilizando a condição de equilíbrio do mercado do capital e as condições de primeira ordem dos agentes, temos que $C_t = C_t^e + C_t^h = \rho^e N_t^e + \rho^h (q_t K_t - N_t^e)$. Dividindo ambos os lados desta equação por N_t obtemos

$$\frac{C_t}{N_t} = \rho^e \eta_t + \rho^h (1 - \eta_t) \equiv f(\eta_t), \quad (20)$$

onde por conveniência definimos $f(x) \equiv \rho^e x + \rho^h (1 - x)$.

A oferta total do bem de consumo é $(A - \iota_t)K_t$. A condição de equilíbrio do mercado do bem de consumo implica

$$f(\eta_t) = \frac{A - \iota_t}{q_t}. \quad (21)$$

A partir daqui, obtemos o preço do capital,

$$q(\eta_t) = \frac{1 + \varphi A}{1 + \varphi f(\eta_t)}. \quad (22)$$

Depois de substituir esta expressão em (19), obtemos a expressão para investimento:

$$\iota(\eta_t) = \frac{A - f(\eta_t)}{1 + \varphi f(\eta_t)}. \quad (23)$$

2. Com esta forma funcional, se φ tende para 0, então $\Phi(\iota_t)$ tende para ι_t , e não há custos de ajustamento.

A fração da riqueza dos especialistas investida no ativo com risco é obtida a partir da condição de equilíbrio do mercado de capitais: $N_t^e(1 - \theta_t) = (1 - \varepsilon)q_t K_t$ ou, equivalentemente,

$$(1 - \theta_t) = (1 - \varepsilon) \frac{1}{\eta_t}. \quad (24)$$

A taxa de juro sem risco é determinada a partir da equação que caracteriza a carteira ótima do especialista (15) e a condição de equilíbrio de mercado (24):

$$r_t = -(1 - \varepsilon) \frac{1}{\eta_t} (\sigma_t^q + \sigma)^2 + \mu_t^{r^K}. \quad (25)$$

A derivação dos drifts e das volatilidades das variáveis relevantes: a variável de estado, o preço do capital e a taxa de retorno do capital são diretas, mas muito demoradas. Como tal isso é feito no Apêndice.

3.9. Exemplo numérico

Adotamos os valores da literatura para os parâmetros, por exemplo Silva (2020) e Brunnermeier e Sannikov (2017). Definimos o nível de tecnologia $A = \frac{1}{3}$, que corresponde a uma relação capital-produto de 3. A taxa de depreciação δ é igual a 0.05. Assumiremos que as famílias são mais pacientes do que os especialistas financeiros e, portanto, $\rho^e = 0.05 > 0.02 = \rho^h$. Finalmente, o risco fundamental $\sigma = 10\%$ e o parâmetro de custo de capital $\varphi = 10$.

O Gráfico 5 mostra o preço do capital, a taxa de juro sem risco, e o drift e a volatilidade da fração da riqueza dos especialistas η_t para diferentes valores dos parâmetros. Começamos por descrever o caso, representado pela linha azul, em que as famílias são tão pacientes como especialistas, $\rho^h = \rho^e = 0.05$, e não há intervenção do banco central ($\varepsilon = 0$). Os resultados neste caso estão de acordo com os resultados em Brunnermeier e Sannikov (2017). Observamos no painel superior esquerdo que o preço do capital, q , é constante e igual a $\frac{1+\varphi A}{1+\varphi \rho^e}$. O balanço dos especialistas concentra todos os riscos da economia, pois neste caso os especialistas são os únicos detentores de capital. No caso de um choque negativo sobre o capital, a riqueza relativa dos especialistas diminui. Nesse caso, os especialistas exigem um prêmio de risco mais alto e a taxa sem risco diminui, conforme observado no painel superior direito do Gráfico 5. Com uma taxa sem risco mais baixa, os especialistas pagam menos às famílias nos empréstimos e, portanto, a riqueza relativa dos especialistas volta rapidamente para valores mais altos, como pode ser visto na linha azul no painel inferior direito. No longo prazo, a riqueza relativa dos especialistas converge para um.

Vejamos agora o caso, representado pela linha vermelha, em que as famílias são mais pacientes do que os especialistas financeiros, $\rho^e > \rho^h$, mas ainda sem intervenção do banco central. Nesse caso, o preço do capital deixa de ser constante, depende de η_t . De fato, no painel superior esquerdo do Gráfico 5, observamos $q'(\eta_t) < 0$. Com um choque negativo, à medida que a riqueza relativa dos especialistas diminui, o preço do capital aumenta. Diferenças nas taxas de desconto dos agentes levam a um aumento na taxa juro sem risco, conforme observado quando comparamos as linhas azul e vermelha no painel superior direito do Gráfico 5 e no painel esquerdo do Gráfico 6. Como agora temos

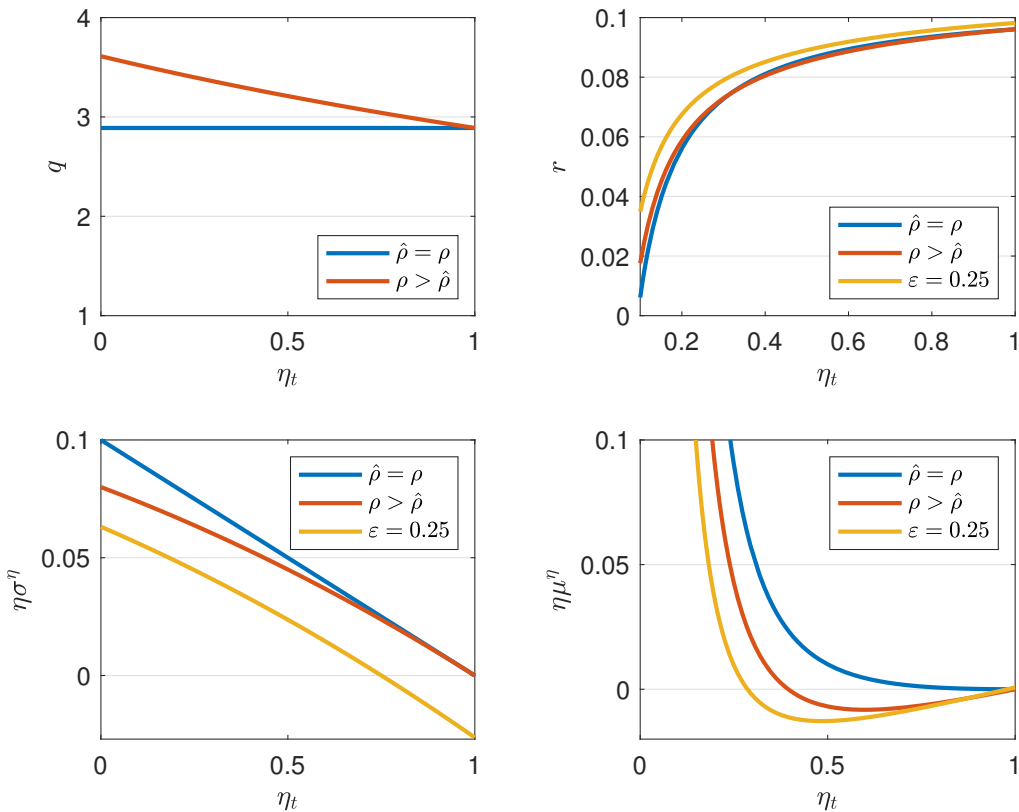


GRÁFICO 5: Preço do capital, taxa sem risco, drift e volatilidade de do η_t .

diferenças nos padrões de consumo dos agentes, se a riqueza relativa dos especialistas aumentar substancialmente, a sua maior taxa de consumo, quando comparada com as famílias, fará com que eles percam riqueza ao longo do tempo, em média (ver painel inferior direito no Gráfico 5). Como resultado, e ao contrário do caso acima, a economia deixa de ser dominada no longo prazo pelo setor dos especialistas. Por fim, no painel inferior esquerdo, observamos como, neste caso, temos uma mitigação do efeito de um choque negativo na taxa de rentabilidade do capital. Como resultado, a volatilidade da variável agregada é menor neste caso.

Por fim, analisamos o modelo completo, no qual o banco central detém parte do capital da economia. Este caso é representado pela linha amarela. Aqui assumimos que a proporção do capital detido pelo banco central é $1/4$ do capital agregado, ou seja, $\varepsilon = 0.25$, o que equivale a $3/4$ do PIB. Nesse caso, o preço do capital permanece inalterado, ou seja, é igual ao caso anterior. Como podemos observar no painel inferior esquerdo, há uma menor volatilidade na riqueza relativa dos especialistas. Como no caso anterior, à medida que a riqueza dos especialistas diminui, o seu risco patrimonial aumenta. No entanto, como os especialistas deixam de ser os únicos agentes detentores de capital, o aumento do risco é menor do que nos casos anteriores. Como resultado, a taxa de juro sem risco é maior e apresenta um perfil mais convexo. A redução do risco para os especialistas tem impacto direto no prémio de risco.

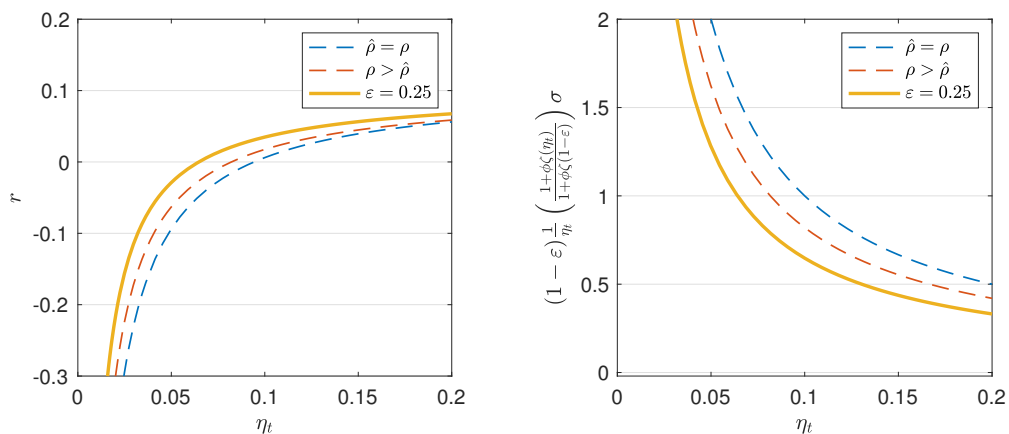


GRÁFICO 6: Taxa de juro sem risco e Sharpe ratio (detalhe, $0 < \eta_t \leq 0.2$).

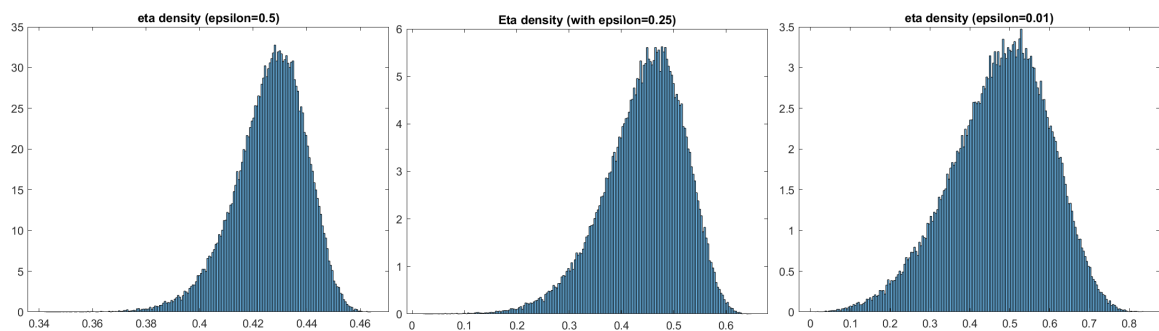


GRÁFICO 7: Densidade de estado estacionário de η_t

No Gráfico 6, podemos observar como um choque negativo no capital leva a um aumento do prémio de risco, medido pelo Sharpe ratio (painel à direita). No caso com intervenção do banco central, o preço de mercado do risco aumenta, mas menos do que no caso sem intervenção do banco central, demonstrando assim o efeito positivo da política monetária não convencional. No painel da esquerda, observamos como esse efeito atenuante no prémio de risco se traduz numa taxa de juro sem risco maior do que nos casos sem política monetária não convencional.

3.10. Resultados para o estado estacionário

Nesta seção, estudamos como diferentes níveis de política não convencional afetam o equilíbrio de estado estacionário da economia quando as famílias são mais pacientes que os especialistas financeiros. Começamos determinando a distribuição estacionária da riqueza relativa dos especialistas. A distribuição estacionária da riqueza relativa dos especialistas é obtida simulando a versão discretizada da lei de movimento do η até que a convergência seja alcançada. Um conjunto fino de pontos no intervalo $(0, 1)$ foi considerado para os valores iniciais da variável de estado. Todos esses valores iniciais da riqueza relativa dos especialistas convergiram para a mesma distribuição estacionária dessa variável.

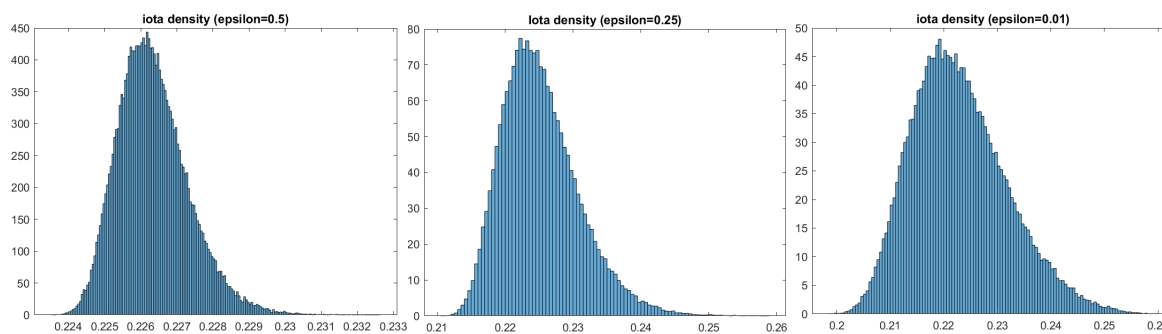


GRÁFICO 8: Densidade de estado estacionário de l_t

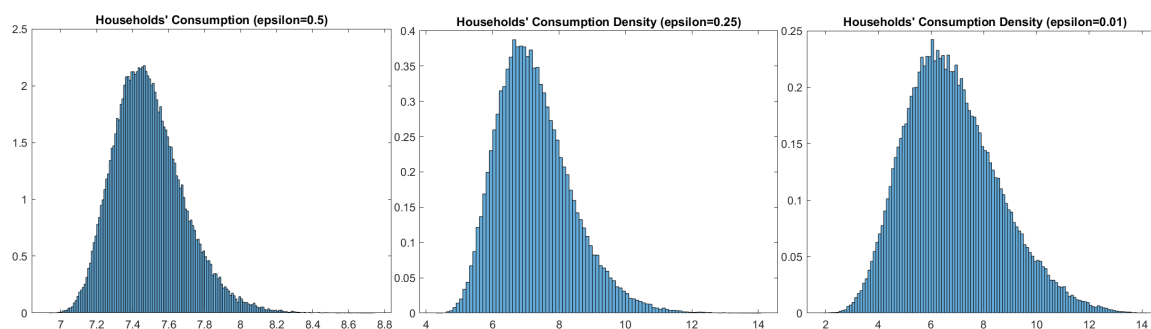


GRÁFICO 9: Densidade de estado estacionário de c_t^h

O gráfico 7 mostra a distribuição estacionária da riqueza relativa dos especialistas para 3 níveis diferentes de política monetária não convencional, $\epsilon = 0.01, 0.25$ e 0.5 . Mostra que o aumento do tamanho das operações de mercado aberto diminui a dispersão da riqueza relativa dos especialistas, o que implica uma menor dispersão da taxa de juro sem risco, preço do capital, prémio de risco, taxa de investimento e Sharpe ratio. Adicionalmente, a média da riqueza relativa dos especialistas diminui com o tamanho das operações de mercado aberto.

O gráfico 8 mostra a distribuição do estado estacionário da taxa de investimento para os mesmos 3 níveis de política monetária não convencional. A dispersão da taxa de investimento diminui com o tamanho da política não convencional e a taxa média de investimento aumenta com o tamanho da política não convencional. No entanto, os impactos são quantitativamente pequenos.

Por fim, investigamos os efeitos da política não convencional sobre os consumos dos dois tipos de consumidores. Os gráficos 9 e 10 mostram como as densidades estacionárias dos consumos mudam com a política monetária não convencional. A dispersão dos consumos diminui substancialmente à medida que aumenta a dimensão da política não convencional.

Usando estas densidades estacionárias, obtemos que a utilidade esperada das famílias aumenta com o tamanho das operações de mercado aberto, enquanto a utilidade esperada dos especialistas diminui com o tamanho das operações de mercado aberto. A razão para a taxa média de investimento aumentar com o tamanho das operações de mercado aberto está associada ao facto das famílias pouparem mais do que

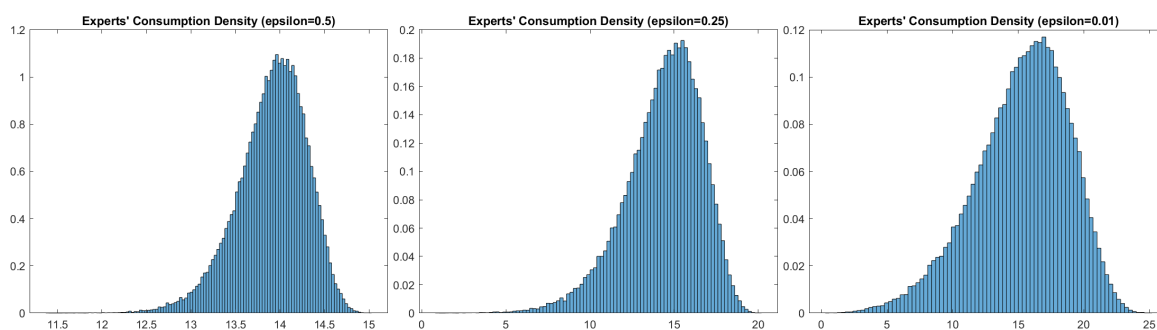


GRÁFICO 10: Densidade de estado estacionário de c_t^e

os especialistas e a riqueza média das famílias aumentar com a dimensão da política não convencional.

4. Conclusão

Após um choque negativo no balanço dos intermediários, a sua capacidade de deter ativos com risco diminui e, como consequência, o preço de mercado do risco (ou prémio de risco) aumenta e a taxa de juro sem risco diminui. Neste artigo mostramos que a política monetária não convencional pode mitigar estes efeitos. Investigamos os efeitos das compras em grande escala de ativos (LSAPs) pelos bancos centrais num modelo muito simples, onde alguns agentes, as famílias, não participam no mercado dos ativos financeiros com risco. Neste contexto, as LSAP redistribuem o risco na economia, reduzindo a exposição dos balanços dos intermediários a choques do capital, conduzindo a uma redução do prémio de risco e a um aumento da taxa de juro sem risco.

As LSAPs também estabilizam a economia: as volatilidades do consumo, investimento e PIB diminuem com o tamanho da política monetária não convencional. Como as LSAPs permitem que as famílias tenham acesso indireto a um mercado que lhes estava vedado e quebram o monopólio dos intermediários nesse mercado, o património médio dos especialistas diminui enquanto o património médio das famílias aumenta. A utilidade esperada das famílias aumenta, a utilidade esperada dos intermediários diminui e a taxa média de investimento na economia aumenta.

Referências

- Albertazzi, U., B. Becker, e M. Boucinha (2021). "Portfolio rebalancing and the transmission of large-scale asset purchase programs: Evidence from the Euro area." *Journal of Financial Intermediation*, 48(C).
- Andrade, Philippe, Christophe Cahn, Henri Fraisse, e Jean-Stéphane Mésonnier (2015). "Can the Provision of Long-Term Liquidity Help to Avoid a Credit Crunch? Evidence from the Eurosystem's LTROs." Working papers, Banque de France, URL <https://EconPapers.repec.org/RePEc:bfr:banfra:540>.
- Balcilar, M., Z. Ozdemir, H. Ozdemir, e M. Wohar (2020). "Fed's unconventional monetary policy and risk spillover in the US financial markets." *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 78(C), 42–52.
- Basak, S. e D. Cuoco (1998). "An Equilibrium Model with Restricted Stock Market Participation." *The Review of Financial Studies*, 11(2), 309–341.
- Bindseil, U (2014). *Monetary Policy Operations and the Financial System*. Oxford University Press, URL <https://EconPapers.repec.org/RePEc:oxp:obooks:9780198716907>.
- Brunnermeier, M. K. e Y. Sannikov (2017). *Macro, Money and Finance: A Continuous-Time Approach*, vol. 2B, pp. 1497–1546. North-Holland.
- Bryan, Michael F. e Brent H. Meyer (2010). "Are Some Prices in the CPI More Forward Looking Than Others? We Think So." *Economic Commentary (Federal Reserve Bank of Cleveland)*, pp. 1–5.
- Carpinelli, Luisa e Matteo Crosignani (2017). "The Effect of Central Bank Liquidity Injections on Bank Credit Supply." Finance and Economics Discussion Series 2017-038, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.), URL <https://EconPapers.repec.org/RePEc:fip:fedgfe:2017-38>.
- Chamley, Christophe e Herakles Polemarchakis (1984). "Assets, General Equilibrium and the Neutrality of Money." *Review of Economic Studies*, 51(1), 129–38.
- Clouse, J., D. Henderson, A. Orphanides, D. H. Small, e Tinsley P.A. (2003). "Monetary Policy When the Nominal Short-Term Interest Rate is Zero." *The B.E. Journal of Macroeconomics*, 3(1), 1–65.
- Cúrdia, V. e M. Woodford (2011). "The Central-Bank Balance Sheet as an Instrument of Monetary Policy." *Journal of Monetary Economics*, 58(1), 54–79.
- d'Avernas, Adrien, Matthieu Darracq Pariès, e Quentin Vandeweyer (2019). "Unconventional Monetary Policy and Funding Liquidity Risk."
- De Santis, R. e A. Zaghini (2021). "Unconventional monetary policy and corporate bond issuance." *European Economic Review*, 135(C), S0014292121000805.
- Eggertsson, G. e M. Woodford (2003). "The Zero Bound on Interest Rates and Optimal Monetary Policy." *Brookings Papers on Economic Activity*, 34(1), 139–235.
- Farinha, J. e J. Vidrago (2021). "The impact of the ECB's asset purchase programme on euro area equities." *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 82(C), 270–279.
- Fonseca, L., M. Faria e Castro, e M. Crosignani (2015). "Central Bank Interventions, Demand for Collateral, and Sovereign Borrowing Costs." Working Papers w201509, Banco de Portugal, Economics and Research Department, URL <https://ideas.repec.org/p/ptu/wpaper/w201509.html>.

- Garcia-Posada, Miguel e Marcos Marchetti (2016). "The bank lending channel of unconventional monetary policy: The impact of the VLTROs on credit supply in Spain." *Economic Modelling*, 58(C), 427–441.
- Guo, H., A. Kontonikas, e P. Maio (2020). "Monetary Policy and Corporate Bond Returns." *The Review of Asset Pricing Studies*, 10(3), 441–489.
- Kiyotaki, Nobuhiro e John Moore (1997). "Credit Cycles." *Journal of Political Economy*, 105(2), 211–248.
- Koijen, R., F. Koulischer, B. Nguyen, e M. Yogo (2017). "Euro-Area Quantitative Easing and Portfolio Rebalancing." *American Economic Review*, 107(5), 621–27.
- Krishnamurthy, A., S. Nagel, e A. Vissing-Jorgensen (2017). "ECB Policies Involving Government Bond Purchases: Impact and Channels*." *Review of Finance*, 22(1), 1–44.
- Krishnamurthy, A. e A. Vissing-Jorgensen (2011). "The Effects of Quantitative Easing on Interest Rates: Channels and Implications for Policy." *Brookings Papers on Economic Activity*, 42(2 (Fall)), 215–287.
- Lewis, V. e M. Roth (2019). "The financial market effects of the ECB's asset purchase programs." *Journal of Financial Stability*, 43(C), 40–52.
- Peled, D. (1985). "Stochastic Inflation and Government Provision of Indexed Bonds." *Journal of Monetary Economics*.
- Sargent, T./ J. e B./ D. Smith (1987). "Irrelevance of Open Market Operations in Some Economies with Government Currency Being Dominated in Rate of Return." *American Economic Review*, 77(1), 78–92.
- Silva, Dejanir (2020). "The Risk Channel of Unconventional Monetary Policy." *Review of Financial Studies*. Revise and resubmit.
- Stroebel, Johannes e John B. Taylor (2012). "Estimated Impact of the Federal Reserve's Mortgage-Backed Securities Purchase Program." Tech. rep.
- Taylor, John B (2009). "The Financial Crisis and the Policy Responses: An Analysis of What Went Wrong." Tech. rep., NBER working paper no. 14631, January 2009.
- Vayanos, D. e J.-L. Vila (2021). "A Preferred-Habitat Model of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica*, 89(1), 77–112.
- Wallace, Neil (1981). "A Modigliani-Miller Theorem for Open-Market Operations." *American Economic Review*, 71, 267–274.

Apêndice

Começamos com a derivação da dinâmica da variável de estado agregada, a parcela da riqueza dos especialistas, $\eta_t = \frac{N_t^e}{q_t K_t}$, com $0 \leq \eta_t \leq 1$. Para isso, utilizamos o lema de Itô e a definição de fator de desconto estocástico. O fator de desconto estocástico para esta economia é dado por

$$\frac{d\xi_t}{\xi_t} = -r_t dt - \sigma_t^{n^e} dZ_t, \quad (\text{A.1})$$

Dada a ausência de riscos para além do risco agregado, temos $N_t^e = n_t^e$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{dN_t^e}{N_t^e} &= \frac{dn_t^e}{n_t^e} = \left(-\frac{c_t^e}{n_t^e} + \theta_t r_t + (1 - \theta_t) \mu_t^{r^K} \right) dt + (1 - \theta_t) (\sigma_t^q + \sigma) dZ_t \\ &= \left(-\frac{c_t^e}{n_t^e} + r_t + (1 - \theta_t) \sigma_t^{n^e} (\sigma_t^q + \sigma) \right) dt + (1 - \theta_t) (\sigma_t^q + \sigma) dZ_t, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e usando

$$\begin{aligned} \frac{d(q_t k_t)}{q_t k_t} &= (\mu_t^q + \Phi(\iota_t) - \delta + \sigma_t^q \sigma) dt + (\sigma_t^q + \sigma) dZ_t \\ &= \left[\left(r_t - \frac{A - \iota_t}{q_t} \right) + \sigma_t^{n^e} (\sigma_t^q + \sigma) \right] dt + (\sigma_t^q + \sigma) dZ_t, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

obtemos

$$\frac{d\eta_t}{\eta_t} = \left(-\frac{c_t^e}{n_t^e} + \frac{A - \iota_t}{q_t} - \theta_t (\sigma_t^q + \sigma) (\sigma_t^{n^e} - (\sigma_t^q + \sigma)) \right) dt - \theta_t (\sigma_t^q + \sigma) dZ_t. \quad (\text{A.4})$$

Usando o facto de que $\sigma_t^{n^e} = (1 - \theta_t) (\sigma_t^q + \sigma)$, obtemos uma expressão alternativa para a evolução de η_t :

$$\frac{d\eta_t}{\eta_t} = \left(\frac{A - \iota_t}{q_t} - \rho^e + \theta_t^2 (\sigma_t^q + \sigma)^2 \right) dt - \theta_t (\sigma_t^q + \sigma) dZ_t. \quad (\text{A.5})$$

Agora procedemos com a determinação da lei de movimento do preço do capital $q_t = q(\eta_t)$, que assumimos seguir um processo estocástico com drift μ_t^q e volatilidade σ_t^q . Pelo lema de Itô obtemos

$$\frac{dq(\eta_t)}{q(\eta_t)} = \frac{q'(\eta_t) \mu^q \eta_t + \frac{1}{2} q''(\eta_t) (\sigma^q \eta_t)^2}{q(\eta_t)} dt + \frac{q'(\eta_t)}{q(\eta_t)} \eta_t \sigma^q dZ_t. \quad (\text{A.6})$$

A partir da condição de equilíbrio no mercado do capital (24), e (A.5) obtemos:

$$\sigma^q(\eta_t) = \frac{q'(\eta_t)}{q(\eta_t)} \eta_t \sigma^q = \frac{q'(\eta_t)}{q(\eta_t)} (1 - \varepsilon - \eta_t) (\sigma_t^q + \sigma). \quad (\text{A.7})$$

Depois de resolver (A.7) para a volatilidade do preço obtemos

$$\sigma^q(\eta_t) = \frac{(1 - \varepsilon - \eta_t) \frac{q'(\eta_t)}{q(\eta_t)}}{1 - (1 - \varepsilon - \eta_t) \frac{q'(\eta_t)}{q(\eta_t)}} \sigma. \quad (\text{A.8})$$

Depois de substituir em (A.8) a expressão para $q(\eta_t)$ dada por (22) (e a sua derivada) obtemos

$$\sigma^q(\eta_t) = \frac{\varphi(\rho^h - \rho^e)(1 - \varepsilon - \eta_t)}{1 + \varphi f(1 - \varepsilon)} \sigma, \quad (\text{A.9})$$

onde $f(1 - \varepsilon) = \rho^e(1 - \varepsilon) + \rho^h\varepsilon$. Por conveniência, usamos a notação $f(x) \equiv \rho^e x + \rho^h(1 - x)$. O drift do processo, $\mu^q = \mu^q(\eta_t)$, também pode ser calculado. Pode-se mostrar que

$$\mu^q(\eta_t) = \varphi(\rho^h - \rho^e) \left[\frac{\eta_t(1 - \eta_t)}{1 + \varphi f(\eta_t)} (\rho^h - \rho^e) + \frac{(1 + \varphi\rho^h)}{\eta_t} \left(\frac{(1 - \varepsilon - \eta_t)\sigma}{1 + \varphi f(1 - \varepsilon)} \right)^2 \right], \quad (\text{A.10})$$

onde $f(\eta_t) = \rho^e\eta_t + \rho^h(1 - \eta_t)$. De acordo com (25) para obter r_t precisamos de determinar $\mu_t^{r^K}$, que de acordo com (7) é $\mu_t^{r^K} = \left(\frac{A - \iota_t}{q_t} + \mu_t^q + \Phi(\iota_t) - \delta + \sigma_t^q \sigma \right)$.

Depois de substituir em (25) as expressões para μ_t^q , σ_t^q e $\mu_t^{r^K}$ obtemos uma expressão para a taxa de juro sem risco, que é apenas função dos parâmetros do modelo e da variável de estado,

$$\begin{aligned} r_t = f(\eta_t) + \frac{1}{\varphi} \log \left(\frac{1 + \varphi A}{1 + \varphi f(\eta_t)} \right) - \delta + \frac{\varphi(\rho^h - \rho^e)\sigma^2}{1 + \varphi f(1 - \varepsilon)} ((1 - \varepsilon) - \eta_t) \\ - (1 - \varepsilon) \frac{1}{\eta_t} \left(\frac{1 + \varphi f(\eta_t)}{1 + \varphi f(1 - \varepsilon)} \right)^2 \sigma^2 \\ + \varphi(\rho^h - \rho^e) \left[\frac{\eta_t(1 - \eta_t)(\rho^h - \rho^e)}{1 + \varphi f(\eta_t)} + \frac{(1 + \varphi\rho^h)}{\eta_t} \left(\frac{(1 - \varepsilon) - \eta_t}{1 + \varphi f(1 - \varepsilon)} \sigma \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, depois de substituir em (A.5) a expressão para σ_t^q obtemos a lei de movimento de η_t ,

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_t}{\eta_t} = \left((\rho^h - \rho^e)(1 - \eta_t) + \left(\frac{(1 - \varepsilon) - \eta_t}{\eta_t} \frac{1 + \varphi f(\eta_t)}{1 + \varphi f(1 - \varepsilon)} \right)^2 \sigma^2 \right) dt \\ + \left(\frac{1 + \varphi f(\eta_t)}{1 + \varphi f(1 - \varepsilon)} \right) \frac{(1 - \varepsilon) - \eta_t}{\eta_t} \sigma dZ_t. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

O Sharpe ratio do investimento com risco é

$$\begin{aligned} \frac{\frac{A - \iota_t}{q_t} + \mu_t^q + \Phi(\iota_t) - \delta + \sigma_t^q \sigma - r_t}{\sigma_t^q + \sigma} &= (1 - \varepsilon) \frac{1}{\eta_t} (\sigma_t^q + \sigma) \\ &= (1 - \varepsilon) \frac{1}{\eta_t} \left(\frac{1 + \varphi f(\eta_t)}{1 + \varphi f(1 - \varepsilon)} \right) \sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$