

Co-movimento em revisões de expectativas de inflação de curto e longo prazo

António Armando Antunes
Banco de Portugal e NOVA SBE

Maio de 2015

Resumo

Este artigo estuda o co-movimento entre revisões extremas diárias das expectativas de inflação de curto e de longo prazo por meio de cópulas. Os principais resultados são: em primeiro lugar, o co-movimento de revisões invulgares nas expectativas de inflação de curto e de longo prazo aumentou significativamente a partir de meados de 2012, o que implica que as expectativas de inflação de longo prazo podem não estar, num sentido preciso, bem ancoradas. Em segundo lugar, este co-movimento é uma medida exibindo bastante ruído. Finalmente, os resultados apresentados não são um artifício da metodologia ou dos dados específicos usados na análise. (JEL: C14, C46, G12)

Introdução

As expectativas de inflação baseadas em dados de mercado são amplamente utilizadas pelos agentes intervenientes nos mercados e pelos decisores políticos quer para tomada de decisões, quer para inferir quais as decisões de política monetária prováveis por parte dos bancos centrais. As expectativas de inflação com base em inquéritos também são amplamente utilizadas mas, para os fins deste artigo, não são adequadas dada a menor frequência dos dados. As expectativas de inflação baseadas no mercado podem ser determinadas de várias formas, mas talvez o método mais popular seja aquele que recorre aos preços de mercado de *swaps* de inflação de cupão zero. Estes instrumentos financeiros são compostos de uma parte fixa (ou *fixed leg*) e de uma parte variável (ou *variable leg*) e podem ser utilizados para proteção do investidor contra flutuações da taxa de inflação. Por exemplo, suponha-se que o investidor A quer proteger-se contra flutuações da taxa de inflação dado que irá deter um ativo nominal por um período de cinco anos a partir de agora. Ele pode subscrever um contrato de *swap* de inflação de cupão zero nos seguintes termos: no final dos cinco anos, recebe a variação percentual do índice de inflação relevante, que na área

Agradecimentos: Agradeço a Ildeberta Abreu, Rafael Barbosa, Nikolay Iskrev e Paulo Rodrigues, bem como aos participantes de seminários internos, pelas úteis discussões e ajuda.

E-mail: aantunes@bportugal.pt

do euro pode ser, por exemplo, o HIPC excluindo tabaco, multiplicada pelo valor nominal do contrato. Isto compensa-o exatamente pela variação de sinal oposto no valor real do ativo nominal. Ao mesmo tempo, o investidor paga a parte fixa do contrato à contraparte B, que é determinada usando a taxa fixa composta a cinco anos. Este procedimento dá lugar a um único fluxo de caixa trocado na maturidade do contrato, podendo a posição ser fechada a qualquer momento mediante a venda do contrato no mercado. A taxa da parte fixa do contrato corresponde à taxa de inflação média esperada para os próximos cinco anos. Na verdade, a contraparte B entra no contrato só se acreditar que a taxa fixa vai ser igual ou superior à taxa de inflação média efetivamente observada à data de vencimento. Por outro lado, o investidor A entra no contrato só se acreditar que a inflação efetivamente observada vai ser igual ou superior à taxa acordada na parte fixa. É claro que existem efeitos adicionais envolvidos. Em particular, porque A é efetivamente protegido contra o risco de inflação, B tem de ser compensada através de um prémio de risco de inflação.

Usando expectativas da taxa de inflação baseadas no mercado, este artigo avalia o co-movimento entre as revisões diárias nas expectativas de inflação de curto e de longo prazo utilizando cópulas, uma classe especial de funções de distribuição multivariadas. A principal vantagem da utilização de cópulas está nas suas implicações simples em termos de dependência de variáveis aleatórias, especialmente nas caudas da distribuição. Isto permite uma avaliação do grau com que as mudanças nas expectativas de inflação de longo prazo se co-movem com oscilações significativas nas expectativas de inflação de curto prazo. Além disso, certas cópulas permitem distinguir entre revisões positivas e negativas nas expectativas.

Os decisores de política mencionam frequentemente que as expectativas de inflação de longo prazo estão “bem ancoradas”. No entanto, esta expressão pode significar coisas diferentes. Por vezes, refere-se ao facto de que o nível de expectativas varia em torno de um determinado nível aceite pelo mercado. Noutras ocasiões, a expressão significa apenas que revisões das expectativas de inflação de curto prazo não conduzem necessariamente a revisões das expectativas de inflação de longo prazo. Uma implicação disto é que as revisões nas expectativas de inflação de curto e de longo prazo não devem exibir co-movimento elevado. Os dois significados não são equivalentes e têm implicações distintas em termos dos métodos adequados para investigar se as expectativas de inflação estão bem ancoradas. Enquanto o primeiro coloca a ênfase nos níveis e requer uma análise de séries temporais mais tradicional, o segundo sugere o uso de métodos com ênfase na correlação e no co-movimento, e não necessariamente no acompanhamento do nível das expectativas de inflação. Este artigo adota o segundo tipo de abordagem. Além disso, é dada especial atenção a variações grandes nas expectativas de inflação, uma vez que estas estarão com maior probabilidade associadas a mudanças

fundamentais nas expectativas do que as flutuações de mercado normais e, por conseguinte, de menor magnitude.

Numa situação em que o banco central é considerado credível pelos participantes do mercado e em que as expectativas de inflação de longo prazo estão perfeitamente ancoradas, seria de esperar que grandes revisões das expectativas de inflação de curto prazo apresentassem pouco co-movimento com grandes revisões das expectativas de inflação de longo prazo. Por exemplo, uma queda súbita do preço do petróleo implicando uma grande revisão em baixa das expectativas de inflação de curto prazo não deve implicar uma revisão da mesma magnitude (em termos relativos) das expectativas de inflação de longo prazo.

Inversamente, se observarmos grandes revisões nas expectativas de inflação de longo prazo quando há grandes revisões nas expectativas de curto prazo, a ideia de que as expectativas de inflação de longo prazo estão firmemente ancoradas torna-se menos óbvia. No limite, se alguém observar um co-movimento perfeito entre estas duas variáveis isso significará que as expectativas de inflação não estão ancoradas: elas estariam a reagir imediatamente e de forma significativa à mesma informação que produziu oscilações nas expectativas de curto prazo, com potenciais efeitos prejudiciais para a eficácia da política monetária.

Há uma literatura relativamente extensa sobre o tema que usa dados de alta frequência e se concentra nos efeitos de notícias com relevância econômica sobre as expectativas de inflação de longo prazo. Esta literatura normalmente olha para a possibilidade de ocorrência de quebras estruturais num contexto de análise de regressão (ver, por exemplo, Gürkaynak *et al.* 2010; Galati *et al.* 2011; Nautz e Strohsal 2015). Neste artigo, presume-se que as notícias são incorporadas tanto nas expectativas de curto como de longo prazo, mas, se as expectativas de inflação de longo prazo estiverem bem ancoradas, o efeito sobre elas será pequeno, enquanto que o efeito sobre as de curto prazo poderá ser significativo. Isto deverá induzir um baixo grau de co-movimento entre as expectativas de inflação em horizontes longos e curtos. Usando cópulas estimadas, mostra-se que o co-movimento entre as mudanças nas expectativas de inflação de curto e longo prazo aumentou desde 2012. Isto está em contraste com a ausência de qualquer co-movimento significativo no período de baixa inflação anterior, no final de 2009. Além disso, mostra-se que estes efeitos não são um artifício dos dados através de simulações com permutações aleatórias de dados. A dependência na cauda da distribuição das revisões nas expectativas de inflação de curto e de longo prazo exhibe alguma persistência, mas apenas para defasamentos de um ou dois dias, especialmente na parte mais recente da amostra. Finalmente, diferentes escolhas para as expectativas de inflação de curto e de longo prazo não alteram os resultados de maneira significativa. Embora com ruído, o co-movimento observado em grandes oscilações sugere uma crescente probabilidade de que as expectativas de inflação de longo prazo poderiam ter-se desancorado.

Expetativas de inflação e co-movimento

As expetativas de inflação usadas neste artigo são obtidas a partir de taxas de *swaps* de inflação de cupão zero. Em termos de notação, a inflação média vigente a partir de agora até cinco anos a partir de agora, por exemplo, é denotada por π_{5y0y} , a inflação média vigente a partir do próximo ano para os três anos seguintes é π_{3y1y} , e a inflação média vigente daqui a cinco anos para os cinco anos seguintes é π_{5y5y} . Há restrições entre estes valores e essas restrições permitem calcular todas as expetativas relevantes com base apenas nas taxas de *swaps* de inflação de cupão zero. Por exemplo, se os participantes do mercado são neutros em relação ao risco em mercados perfeitamente competitivos e sem fricções, a igualdade $(1 + \pi_{5y0y})^5 = (1 + \pi_{2y0y})^2(1 + \pi_{3y2y})^3$ deve verificar-se. Observe-se como as duas taxas de cupão zero podem ser usadas para estimar π_{3y2y} . Outro exemplo: $(1 + \pi_{5y5y})^5 = (1 + \pi_{4y5y})^4(1 + \pi_{1y9y})$ deverá verificar-se.

Neste artigo, o valor usado para as expetativas de inflação de curto prazo será a inflação esperada dentro de um ano e durante um ano (π_{1y1y}), e o valor usado para as expetativas de inflação de longo prazo será a inflação esperada dentro de cinco anos durante os cinco anos seguintes (π_{5y5y}).

Dados

Os dados são diários e provenientes da Bloomberg, abrangendo o período de 22Jun04 até 17Fev15. O Gráfico 1 apresenta a evolução ao longo do tempo das duas variáveis escolhidas, π_{1y1y} e π_{5y5y} , assim como a inflação observada com frequência mensal. O Quadro 1 apresenta as estatísticas-resumo dos níveis e primeiras diferenças de π_{1y1y} e π_{5y5y} , bem como de outras variáveis analisadas mais à frente neste artigo. As séries com as primeiras diferenças contêm as revisões diárias das expetativas de inflação de curto e de longo prazo e constituem o foco deste artigo. O Quadro 2 exhibe correlações contemporâneas entre essas variáveis.

A partir das estatísticas-resumo é fácil observar que, historicamente, as expetativas de inflação de curto prazo têm menor média e maior volatilidade do que as expetativas de inflação de longo prazo. Em primeiras diferenças, este comportamento verifica-se também para a volatilidade, mas não para a média, como esperado. As variáveis de nível têm forte persistência. Em primeiras diferenças verifica-se autocorrelação negativa, sugerindo que aumentos nas expetativas de inflação são muitas vezes seguidos de correções no dia de negociação seguinte. A correlação contemporânea entre as revisões das expetativas de inflação de curto e de longo prazo é somente de -0,007.

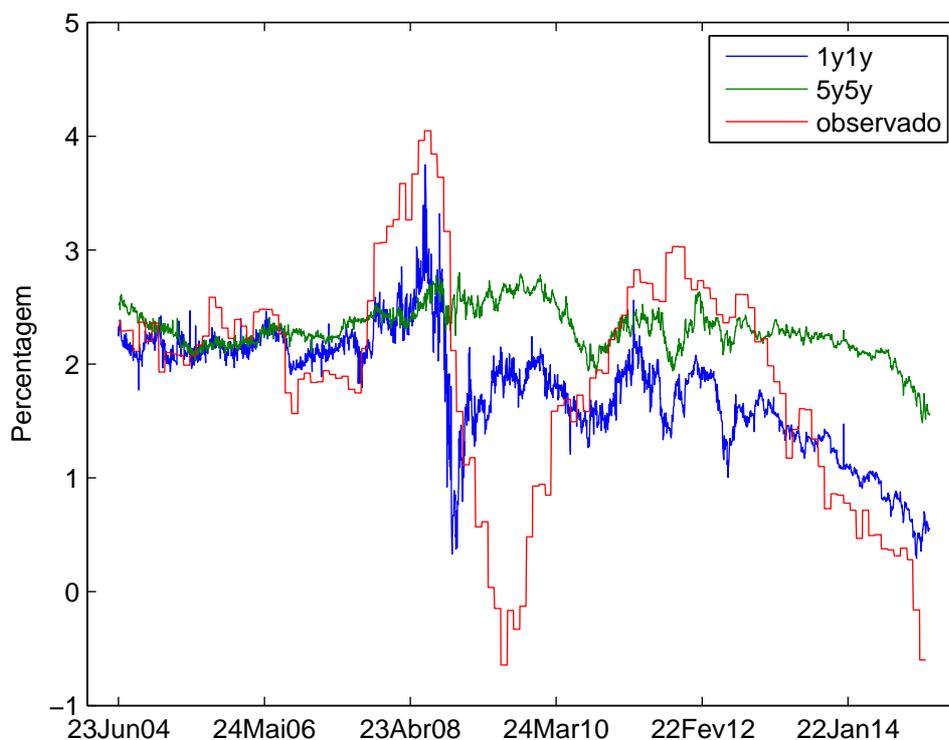


GRÁFICO 1: Expetativas de inflação baseadas no mercado e inflação observada. Dados diários para o período 22Jun04–17Fev15. Todos os valores em porcentagem.

Fonte: Bloomberg.

Dependência na cauda da distribuição

O estudo de co-movimento entre duas variáveis aleatórias X e Y pode ser feito de várias maneiras. A primeira é a correlação simples. Esta estatística com valores entre -1 e 1 é uma medida de como X e Y co-movem em torno das respectivas médias. Por vezes, esta medida é suficiente para o fim em vista. Por exemplo, o co-movimento entre duas variáveis gaussianas pode ser completamente caracterizado pela correlação. Um problema da correlação como medida de dependência cruzada é o facto de uma correlação de zero não implicar, em geral, independência entre as variáveis. Por exemplo, a correlação simples entre uma variável aleatória e o seu quadrado é igual a zero, mas claramente estas duas variáveis não são independentes. Isto na verdade é uma razão válida para não se usar a correlação (ou um coeficiente de regressão linear) para estudar a dependência entre variáveis quando as características dessa dependência são essencialmente desconhecidas. Outro problema com a correlação é que não pode ser definida para determinadas

Variável	Obs.	Média	Desv.-pad.	Mín.	Máx.	Autocorr.
π_{1y1y}	2781	1,787	0,504	0,293	3,751	0,978
π_{5y5y}	2781	2,304	0,205	1,483	2,803	0,987
$\Delta\pi_{1y1y}$	2780	-0,001	0,105	-1,163	1,132	-0,418
$\Delta\pi_{5y5y}$	2780	0,000	0,033	-0,196	0,220	-0,267
x	2780	-0,005	0,999	-5,968	11,334	-0,065
y	2780	0,000	1,000	-7,368	5,507	-0,019
u	2780	0,500	0,289	0,000	1,000	-0,005
v	2780	0,500	0,289	0,000	1,000	0,028

QUADRO 1. Estatísticas-resumo. Dados diários para o período 22Jun04–17Fev14. π_{1y1y} e π_{5y5y} são as taxas de inflação (baseadas no mercado) dentro de um ano durante um ano e dentro de cinco anos durante cinco anos, respetivamente, e $\Delta\pi_{1y1y}$ e $\Delta\pi_{5y5y}$ são as suas primeiras diferenças; x e y correspondem a $\Delta\pi_{1y1y}$ e $\Delta\pi_{5y5y}$ filtradas usando um processo AR(1) para a média condicional e um processo GARCH(1,1) para a variância condicional; u e v correspondem aos quantis empíricos de x e y , respetivamente. Os valores para π_{1y1y} , π_{5y5y} , $\Delta\pi_{1y1y}$ e $\Delta\pi_{5y5y}$ estão em percentagem, exceto as autocorrelações. Os valores para x , y , u , v e para as autocorrelações estão em unidades naturais.

Fontes: Bloomberg e cálculos do autor.

	$\Delta\pi_{1y1y}$	$\Delta\pi_{5y5y}$	x	y	u	v
$\Delta\pi_{1y1y}$	1					
$\Delta\pi_{5y5y}$	-0,007	1				
x	0,761	0,047	1			
y	0,028	0,915	0,094	1		
u	0,681	0,049	0,893	0,088	1	
v	0,024	0,857	0,089	0,931	0,097	1

QUADRO 2. Matriz de correlações. Dados diários para o período 22Jun04–17Fev14. Ver legenda do Quadro 1 para as definições das variáveis.

Fontes: Bloomberg cálculos do autor.

distribuições com caudas pesadas, como é frequentemente o caso com variáveis de rendibilidade financeira (para exemplos de tais distribuições, ver Resnick 2007).

Uma forma alternativa de estudar o co-movimento entre duas variáveis é a *dependência na cauda da distribuição*, e este é o foco deste artigo. Para entender a noção de dependência na cauda da distribuição é necessário primeiro a definir o que são quantis de uma variável aleatória. O quantil k de uma variável aleatória X é o valor tal que a probabilidade de uma realização aleatória de X ser menor ou igual a esse número é exatamente k . Por exemplo, o quantil 0,5 de uma variável aleatória é a sua mediana, e o intervalo definido pelos quantis 0,025 e 0,975 é o intervalo de confiança a 95% dessa variável aleatória.

A ideia de dependência na cauda da distribuição é simples: pegue-se em valores da variável aleatória X acima de um determinado quantil k ; calcule-se a probabilidade de os valores correspondentes da variável aleatória Y estarem acima do quantil k de Y ; tome-se o limite desta probabilidade quando k tende para 1. Esta é a chamada *dependência na cauda superior (ou direita) da distribuição*. Uma medida semelhante pode ser calculada para a *cauda inferior (ou esquerda)*, mas neste caso o limite é tomado quando k tende para 0. Intuitivamente, a dependência na cauda da distribuição *mede o co-movimento de duas variáveis sempre que alguma delas exiba flutuações invulgarmente grandes*.¹

Esta medida pode ser calculada a partir da função de distribuição cumulativa conjunta das duas variáveis, denotada por F . Esta função especifica a probabilidade de uma realização aleatória das duas variáveis ter ambos os valores inferiores ou iguais aos respetivos argumentos de F , de modo que, por exemplo, $F(2, 1)$ é a probabilidade de, para uma dada realização aleatória de X e Y , o valor de X ser menor ou igual a 2 e o valor de Y ser menor ou igual a 1. A distribuição marginal cumulativa é a distribuição cumulativa de uma das variáveis, não condicional à outra; por exemplo $F_X(x) = F(x, +\infty)$ seria a distribuição marginal cumulativa de X .

Uma maneira de prosseguir seria estimar alguma forma paramétrica para a distribuição F e, em seguida, calcular a dependência na cauda da distribuição. Na prática, no entanto, tal estimativa é difícil e sofre de problemas de escala e de domínio frequentes em termos das variáveis X e Y . Um caminho mais fácil para calcular a dependência na cauda da distribuição é usar cópulas.

Cópulas: intuição

As cópulas constituem uma classe especial de funções de distribuição cumulativas; ver Patton (2006b) para a etimologia desta designação e uma justificação para o uso de cópulas em aplicações práticas, e Nelsen (2006) e Patton (2012) para uma exposição detalhada da teoria e aspetos práticos sobre cópulas. As características distintivas de uma cópula são duas: primeiro, as suas variáveis aleatórias subjacentes estão definidas no intervalo $[0, 1]$; em segundo lugar, as suas distribuições marginais são as de uma distribuição uniforme. Usar uma cópula envolve a especificação das funções de distribuição marginais cumulativas de cada variável aleatória, juntamente com uma função (isto é, a cópula) que as liga. Desta forma, o investigador pode separar a modelação das distribuições marginais da dependência entre as duas variáveis. A especificação da cópula implica uma determinada dependência entre as marginais. No caso em que a cópula é o produto de duas funções de distribuição marginais cumulativas, as duas variáveis

1. Ver o Apêndice A para uma definição formal de dependência na cauda da distribuição.

são independentes e pode-se estimar separadamente cada marginal. Caso contrário, pode-se recorrer à estimação de uma cópula para obter de forma eficaz a distribuição conjunta das duas variáveis. Uma vez que a cópula capta de forma flexível a estrutura de dependência entre as variáveis, para quaisquer funções de distribuição marginais cumulativas,² a abordagem das cópulas é especialmente útil na perspetiva da estimação econométrica.³

Transformação dos dados

Tal como acontece com muitas funções de distribuição, as cópulas podem ser ajustadas aos dados usando métodos de máxima verosimilhança. No entanto, as expectativas de taxa de inflação não têm necessariamente que estar contidas no intervalo entre 0 e 1, conforme exigido por qualquer cópula, nem apresentam um comportamento temporalmente não correlacionado. A fim de limpar os dados, nesta análise os dados originais, π_{1y1y} e π_{5y5y} , serão transformados em três etapas. Em primeiro lugar, as variáveis de interesse (revisões diárias) são obtidas através do cálculo das primeiras diferenças dos níveis, obtendo-se $\Delta\pi_{1y1y}$ e $\Delta\pi_{5y5y}$.

Em segundo lugar, dado que o único interesse da análise é a dependência entre as variáveis e de forma a evitar dependência espúria entre as variáveis decorrente da sua persistência ou heteroscedasticidade, as variáveis resultantes são filtradas através de um modelo AR(1) para a média condicional e de uma especificação GARCH(1,1) para a variância condicional (para uma abordagem semelhante, ver, por exemplo Christoffersen *et al.* 2012). Este procedimento dá origem a duas séries com as revisões diárias padronizadas das expectativas de inflação x e y , respectivamente para $\Delta\pi_{1y1y}$ e $\Delta\pi_{5y5y}$.

Em terceiro lugar, as revisões diárias das expectativas de inflação padronizadas são mapeadas para números entre 0 e 1, de modo que as variáveis resultantes podem ser usadas para estimar uma cópula. Isto é feito através do cálculo de uma função de distribuição marginal cumulativa empírica. Mais especificamente, tome-se a série temporal de, digamos, as revisões padronizadas nas expectativas de inflação um ano à frente durante um ano, ou seja, a coleção $\{x_t\}_{t=1,\dots,T}$. Então, há uma certa função de distribuição marginal cumulativa empírica \tilde{F}_X tal que $u_t = \tilde{F}_X(x_t)$. (Esta função é a contrapartida empírica e não paramétrica de F_X .) Faça-se um procedimento semelhante para as expectativas de inflação de longo prazo, y . O Gráfico 2 representa as duas funções de distribuição empíricas. As variáveis u e v assim obtidas são por construção aproximadamente uniformemente distribuídas.

2. Na verdade, a dependência entre as duas distribuições é, usando uma cópula, invariante para transformações monotónicas das duas variáveis aleatórias.

3. Para uma breve exposição da teoria básica sobre cópulas, bem como da noção de uma cópula dinâmica, ver o Apêndice B.

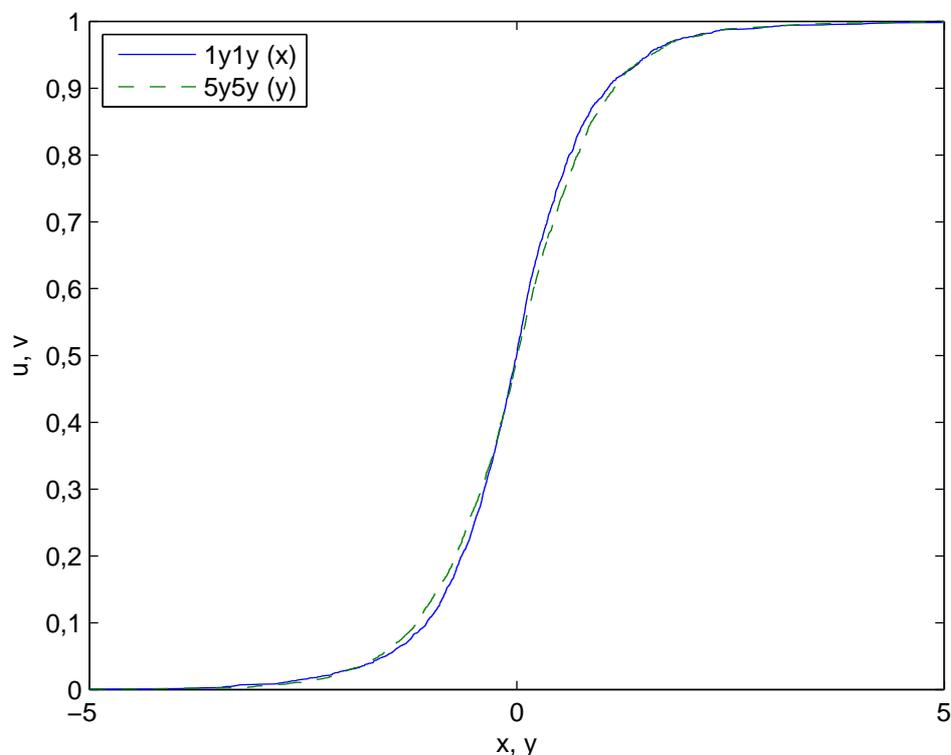


GRÁFICO 2: Funções de distribuição marginais cumulativas empíricas de x e y , as revisões das expectativas de inflação 1y1y e 5y5y padronizadas através da aplicação de um modelo AR(1) para a média condicional e de um modelo GARCH(1,1) para a variância condicional aplicados às revisões diárias das variáveis em nível.

Fontes: Bloomberg e cálculos do autor.

Os Gráficos 3 e 4 apresentam as inovações diárias nas expectativas de inflação, a série padronizada e as variáveis uniformes para as duas variáveis de interesse. Observe-se que não há heterocedasticidade substancial tanto em $\Delta\pi_{1y1y}$ como em $\Delta\pi_{5y5y}$, embora a última exiba menor volatilidade, como visto anteriormente. A heteroscedasticidade é efetivamente removida quando se aplica o filtro acima mencionado em ambas as variáveis. Finalmente, as transformações uniformes de x e y apresentam o comportamento esperado. O Gráfico 5 mostra um detalhe (observações durante 2014) da evolução de x e y .

Voltando aos Quadros 1 e 2, pode ver-se que na maior parte dos casos a autocorrelação é removida pela aplicação dos filtros AR(1) e GARCH(1,1) às primeiras diferenças das expectativas de inflação. Além disso, as revisões das variáveis de curto e longo prazo exibem relativamente baixa correlação contemporânea: a mais alta é a de u com v (0,097).

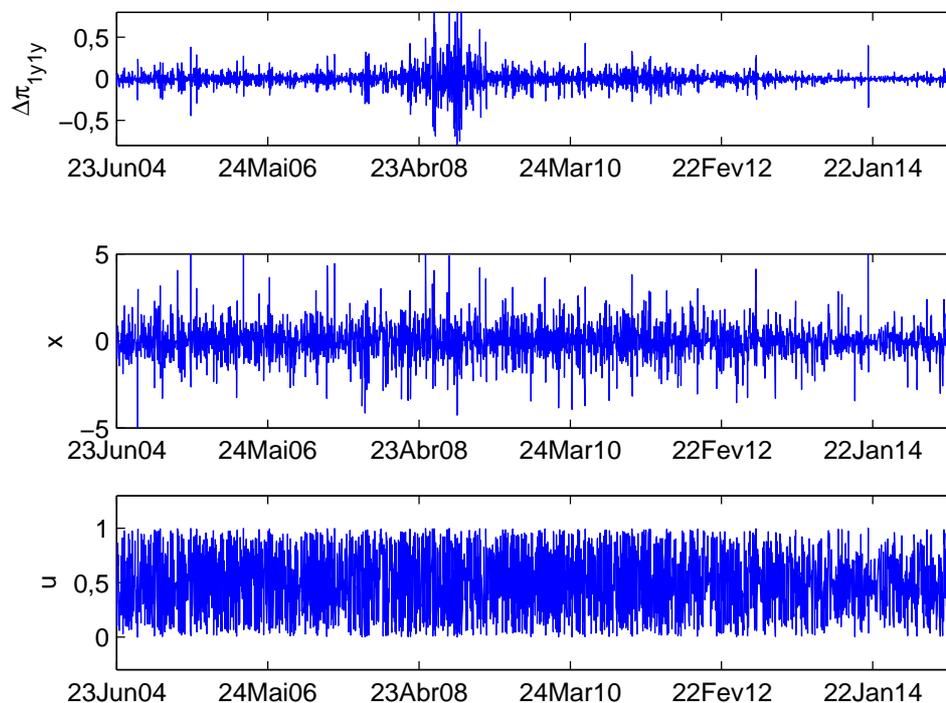


GRÁFICO 3: Evolução de $\Delta\pi_{1y1y}$, x e u . Ver na legenda do Quadro 1 as definições das variáveis.

Fontes: Bloomberg e cálculos do autor.

Resultados

A análise consiste em estimar diversos tipos de cópulas em janelas temporais de cerca de um ano, no início de cada trimestre, e a partir daí obter a dependência na cauda da distribuição implícita na cópula estimada. As cópulas paramétricas estimadas diferem nas suas formas funcionais e, portanto, nas suas características de simetria e dependência na cauda da distribuição.⁴ Um conjunto de exercícios e testes adicionais também foi realizado, mas só será brevemente mencionado aqui.

Antes da análise da evolução da dependência na cauda da distribuição, foi feita uma classificação dos diversos tipos de cópulas estimadas. Veja-se Trivedi e Zimmer (2005) e Patton (2004, 2006a,b) e respectivas referências para descrições completas de cada cópula. O Quadro 3 resume os resultados.

4. Ver Apêndice B para um exemplo paramétrico de uma cópula, bem como as referências aí indicadas para descrições completas das cópulas usadas nesta secção.

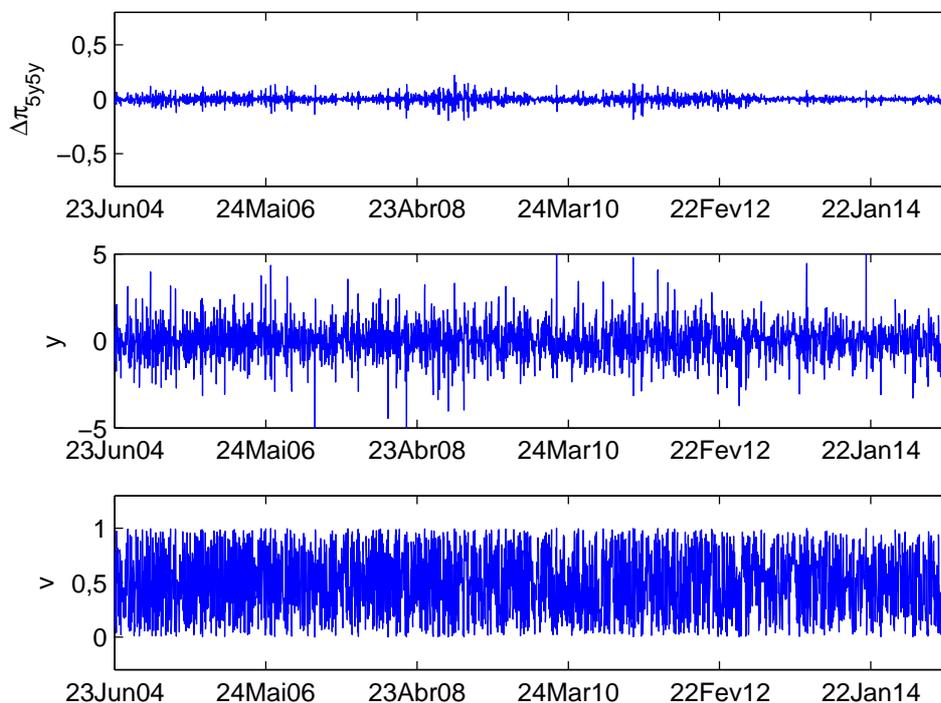


GRÁFICO 4: Evolução de $\Delta\pi_{5y5y}$, y e v . Ver na legenda do Quadro 1 as definições das variáveis.

Fontes: Bloomberg e cálculos do autor.

O critério de classificação usado foi o número de vezes que uma cópula apresentou o maior valor da função de verosimilhança em cada um dos 39 trimestres da amostra. Segundo este critério, a cópula t de Student é a que tem o melhor desempenho, seguida da Normal, da Joe-Clayton simetrizada (*Symmetrized Joe Clayton*, abreviadamente SJC), da Gumbel e da Gumbel com Rotação.

No início de cada trimestre, cada cópula foi estimada utilizando os dados disponíveis dos 350 dias de calendário anteriores. Os resultados são apresentados nos Gráficos 6–8. As áreas sombreadas são as bandas de confiança a 90% obtidas por meio de um procedimento de *bootstrap* (see Patton 2012). Olhando para os resultados da cópula t de Student (Gráfico 6), duas características se destacam. Em primeiro lugar, a dependência na cauda da distribuição é uma medida com algum ruído. A volatilidade dos resultados é ainda visível nas estimativas trimestrais reportadas no gráfico.

O segundo aspecto saliente é que a dependência na cauda da distribuição aumentou de forma acentuada no final da amostra. O início do aumento da dependência na cauda da distribuição pode ser rastreado até 2012. A

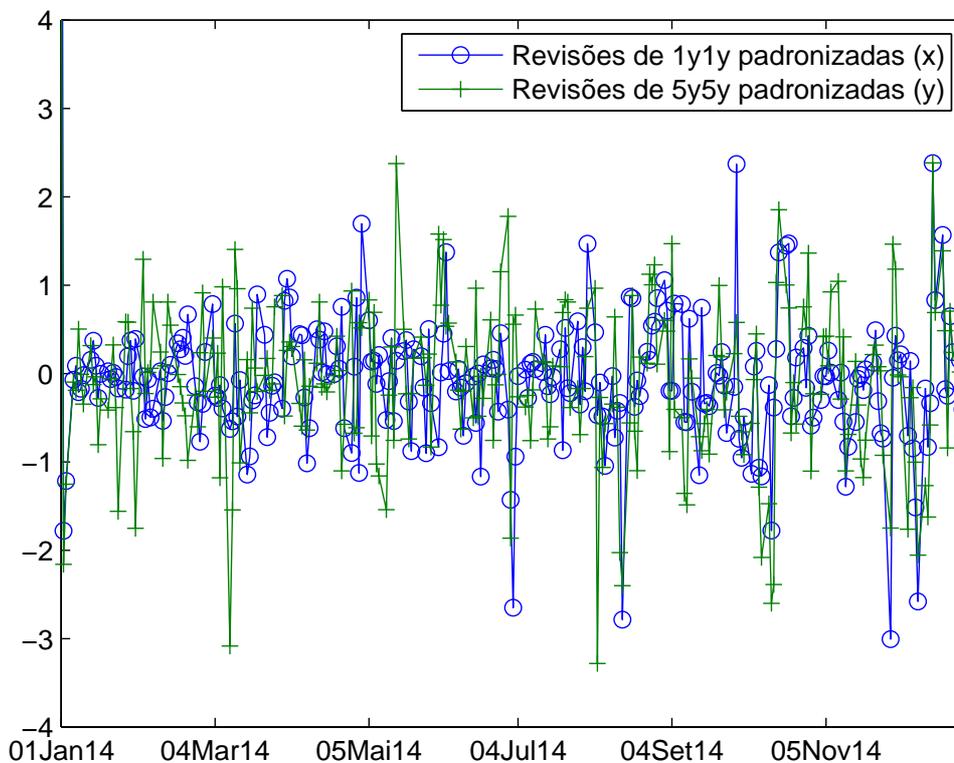


GRÁFICO 5: Evolução de x e y durante 2014. Ver na legenda do Quadro 1 as definições das variáveis.

Fontes: Bloomberg e cálculos do autor.

Cópula	Dependência na cauda	# de trimestres em que foi a melhor
t de Student	Sim, simétrica	20
Normal	Não	9
Joe-Clayton Simetrizada (SJC)	Sim	7
Gumbel	Sim, cauda superior	3
Gumbel com Rotação	Sim, cauda inferior	0

QUADRO 3. Classificação das cópulas estimadas de acordo com o número de trimestres em que cada cópula teve o melhor desempenho.

Fonte: cálculos do autor.

dependência na cauda da distribuição média até 12Q3 foi 0,011, e de 12Q4 em diante foi de 0,138. Isto contrasta com a ausência de qualquer co-movimento

na cauda significativo durante o período de baixa inflação do final de 2009, quando a queda dos preços do petróleo induziu uma descida acentuada da inflação.

O gráfico também mostra o parâmetro de correlação.⁵ Enquanto na primeira parte da amostra a dependência na cauda é relativamente pequena, há um período em que, embora haja correlação entre as duas séries, a dependência na cauda é próxima de zero, sendo por isso a distribuição aproximadamente Normal. Depois disso, em 12Q4, a dependência na cauda começa a aumentar de forma consistente.

Entre as cópulas exibindo dependência na cauda, o segundo melhor desempenho é o da cópula SJC, e a partir dos resultados apresentados no Gráfico 7 pode-se ver que a dependência na cauda superior da distribuição foi maior do que na cauda inferior durante a maior parte da amostra. Isto significa que as grandes revisões para cima nas expectativas de inflação de curto e de longo prazo eram mais propensas a estarem associadas do que as grandes revisões para baixo. Para o final da amostra (14Q2), a dependência na cauda inferior da distribuição aumentou de forma acentuada. Note-se que, uma vez que estão a ser utilizados dados altamente voláteis, a distinção entre revisões para cima e revisões para baixo não é tão clara como, digamos, com dados trimestrais. Na verdade, mesmo quando parece existir uma tendência secular para inflação baixa, quando se olha para períodos de tempo mais longos (como, por exemplo, durante 2014 no Gráfico 1), os dados diários filtrados ainda se parecem com o ruído branco (ver, por exemplo, a série filtrada no Gráfico 5), como esperado, e visualmente há tantas revisões em alta como em baixa.

Para a cópula Gumbel, a dependência na cauda ultrapassa decisivamente a marca de 0,1 em 12Q3, subindo para 0,4 no final da amostra. Os resultados para a Gumbel com Rotação são semelhantes e, portanto, omitidos.

A cópula Normal também tem um bom desempenho, embora tenha zero dependência na cauda. Isso não é surpreendente porque a cópula t de Student estimada (que tem a cópula Normal como um caso particular) é caracterizada por muitos graus de liberdade em muitos trimestres, e isso faz com que seja muito semelhante à cópula Normal nesses trimestres.

A conclusão geral do exercício é que o aumento da dependência na cauda da distribuição é muito acentuado desde o final de 2012.

5. A estimativa da cópula t de Student envolve dois parâmetros: a correlação e os graus de liberdade. Quando os graus de liberdade estimados se tornam altos, a cópula converge para a cópula Normal e não há dependência na cauda da distribuição.

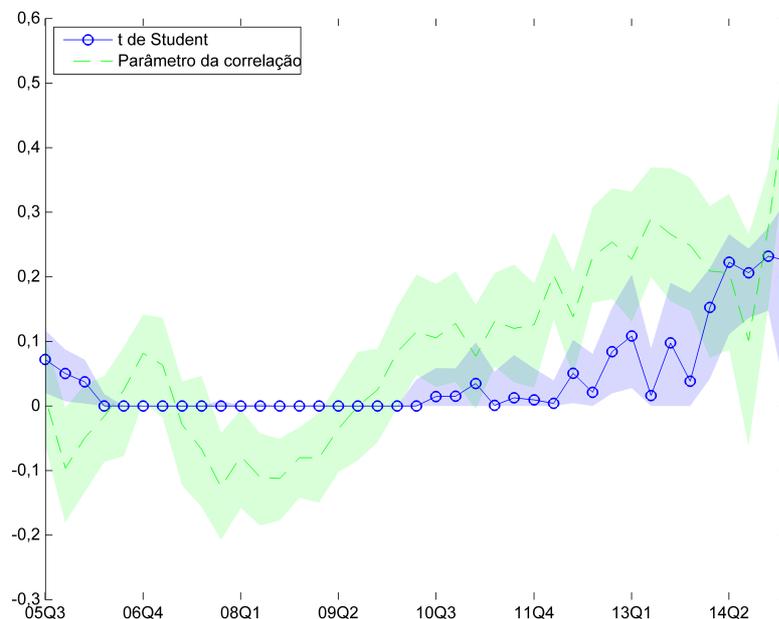


GRÁFICO 6: Dependência na cauda da distribuição usando cópulas t de Student estimadas no início de cada trimestre com dados dos 350 dias de calendário anteriores.

Fonte: cálculos do autor.

Exercícios adicionais

Foram realizados três exercícios adicionais.⁶ O primeiro é um teste de robustez, onde todo o processo é repetido com uma permutação aleatória da série $\{y_t\}_{t=1,\dots,T}$ em vez da série original. A ideia é verificar se existem artifícios dos dados não relacionados com o co-movimento que possam induzir dependência na cauda. Tendo em conta que a permutação deverá destruir toda a dependência temporal e cruzada entre as duas séries temporais, deverá observar-se essencialmente zero dependência na cauda da distribuição. De facto, os resultados mostram muito baixa dependência na cauda ao longo de toda a amostra. Os parâmetros de dependência na cauda encontrados são essencialmente zero. O segundo exercício foi realizar a análise com desfasamentos de um dia e cinco dias (que para este conjunto de dados correspondem a uma semana) na variável y . Os resultados para um dia de desfasamento apresentam algum co-movimento, embora a um

6. Os resultados detalhados destes exercícios estão disponíveis mediante solicitação ao autor.

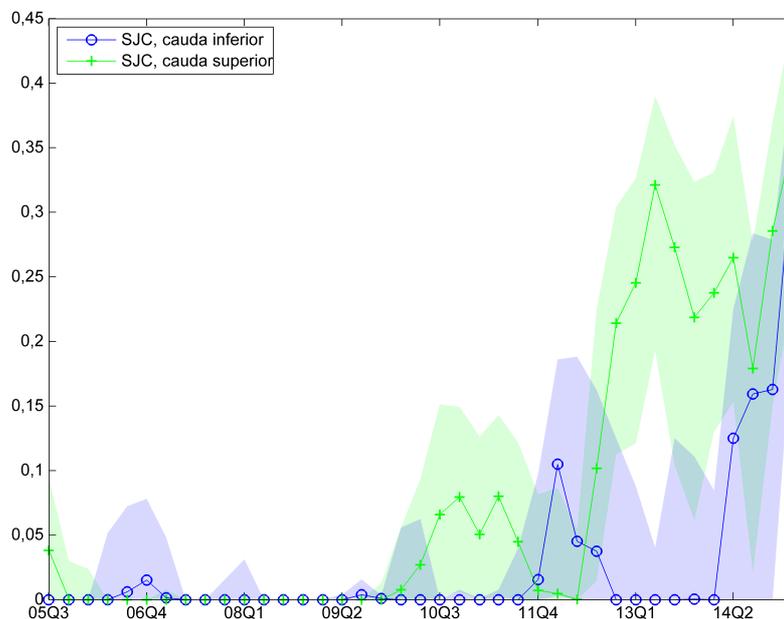


GRÁFICO 7: Dependência na cauda da distribuição usando cópulas Joe-Clayton Simetrizadas estimadas no início de cada trimestre com dados dos 350 dias de calendário anteriores.

Fonte: cálculos do autor.

nível menor do que as estimativas iniciais e concentrado na parte final da amostra. O co-movimento extingue-se muito rapidamente e com uma semana de desfasamento essencialmente desapareceu. Tudo somado, este exercício sugere que há dependência temporal da medida de dependência na cauda da distribuição, mas somente para desfasamentos muito curtos. O terceiro exercício consistiu em realizar a análise com diferentes medidas de expectativas de inflação de curto e de longo prazo, como π_{2y1y} e π_{3y5y} . Os resultados, no entanto, permanecem essencialmente inalterados.

Considerações finais

Este artigo aborda a questão do co-movimento entre revisões de expectativas de inflação de curto e de longo prazo. Em particular, o artigo foca-se numa medida dependência na cauda da distribuição que traduz a probabilidade de duas variáveis exibirem co-movimento quando ocorrem variações grandes numa delas. De acordo com a interpretação de que as expectativas de inflação

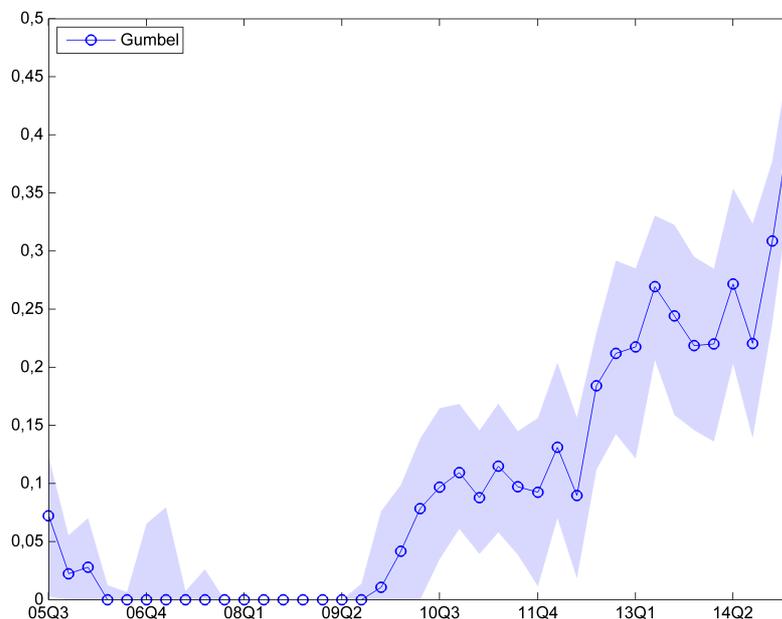


GRÁFICO 8: Dependência na cauda da distribuição usando cópulas Gumbel estimadas no início de cada trimestre com dados dos 350 dias de calendário anteriores.

Fonte: cálculos do autor.

estão bem ancoradas quando inovações grandes nas expectativas de inflação de curto e de longo prazo não tendem a ocorrer em simultâneo, este artigo mostra que o caso de expectativas de inflação estarem bem ancoradas não é tão forte desde meados de 2012 como era antes. Este resultado é robusto a diferentes definições de expectativas de inflação de curto e de longo prazo, e não parece ser um artifício dos dados, produzido por exemplo por persistência ou heterocedasticidade. O co-movimento na cauda da distribuição detetado desvanece-se rapidamente quando os dados não são síncronos. Uma possibilidade de desenvolvimento deste trabalho consiste em investigar a existência de quebras estruturais na dependência na cauda da distribuição neste contexto de modelação por cópulas, e tentar avaliar a direção da causalidade, se a houver, no co-movimento.

Referências

Braun, Valentin e Martin Grziska (2011). "Modeling Asymmetric Dependence of Financial Returns with Multivariate Dynamic Copulas." Mimeo, Goethe

- Universität, Frankfurt, and Ludwig Maximilian Universität, München.
- Christoffersen, Peter, Vihang Errunza, Kris Jacobs, e Hugues Langlois (2012). "Is the Potential for International Diversification Disappearing? A Dynamic Copula Approach." *Review of Financial Studies*, 25(12), 3711–3751.
- Galati, Gabriele, Steven Poelhekke, e Chen Zhou (2011). "Did the Crisis Affect Inflation Expectations?" *International Journal of Central Banking*, 7(1), 167–207.
- Gürkaynak, Refet, Andrew Levin, e Eric Swanson (2010). "Does inflation targeting anchor long-run inflation expectations? Evidence from the US, UK, and Sweden." *Journal of the European Economic Association*, 8(6), 1208–1242.
- Nautz, Dieter e Till Strohsal (2015). "Are US inflation expectations re-anchored?" *Economics Letters*, 127, 6–9.
- Nelsen, R. (2006). *An Introduction to Copulas*. Second ed., Springer, New York.
- Oh, Dong Hwan e Andrew J. Patton (2013). "Time-Varying Systemic Risk: Evidence from a Dynamic Copula Model of CDS Spreads." Mimeo, Duke University.
- Patton, Andrew J. (2004). "On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation." *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 130–168.
- Patton, Andrew J. (2006a). "Estimation of Multivariate Models for Time Series of Possibly Different Lengths." *Journal of Applied Econometrics*, 21, 147–173.
- Patton, Andrew J. (2006b). "Modelling asymmetric exchange rate dependence." *International Economic Review*, 47(2), 527–556.
- Patton, Andrew J. (2012). "A review of copula models for economic time series." *Journal of Multivariate Analysis*, 110, 4–18.
- Resnick, Sidney I. (2007). *Heavy-tail phenomena: probabilistic and statistical modeling*. Springer.
- Sklar, A. (1959). "Fonctions de répartition à N dimensions et leurs marges." *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8, 229–231.
- Sklar, A. (1973). "Random variables, joint distributions, and copulas." *Kybernetika*, 9, 449–460.
- Trivedi, P. K. e D. M. Zimmer (2005). "Copula Modeling: An Introduction for Practitioners." *Foundations and Trends in Econometrics*, 1(1), 1–111.

Apêndice A: Dependência na cauda da distribuição

Neste artigo apenas se analisa o caso bi-variado; na maioria dos casos, a generalização teórica para o caso m -dimensional é imediata. É útil fornecer ao leitor alguma fundamentação teórica. Dadas duas variáveis aleatórias X and Y , defina-se a função de distribuição cumulativa (conjunta) F como:

$$F(x, y) = \Pr\{X \leq x \text{ and } Y \leq y\}. \quad (\text{A.1})$$

Para F se qualificar como uma função de distribuição cumulativa, tem que cumprir certos requisitos. Intuitivamente, é evidente que F tem de ser 0 se qualquer dos seus argumentos é inferior ao mais baixo valor que a variável aleatória respectiva pode atingir; tem que ser 1 se todos os seus argumentos são mais elevados do que o maior valor que cada variável aleatória pode atingir; e deve atribuir um valor não negativo para a probabilidade de qualquer retângulo no seu domínio. Formalmente, estas ideias seriam expressas como $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$ (e de forma análoga para y), $\lim_{x, y \rightarrow +\infty} F(x, y) = 1$, e $F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) \geq 0$ para quaisquer (x_1, y_1) e (x_2, y_2) .

As funções de distribuição marginais cumulativas são definidas como $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$ e $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$. Seja x_k o quantil k da variável X , isto é, o valor de x que é solução da equação $F_X(x) = k$, e de forma análoga para y .⁷ A dependência na cauda superior da distribuição é então definida como

$$\lambda_U = \lim_{k \rightarrow 1} \Pr\{y > y_k | x > x_k\}. \quad (\text{A.2})$$

Analogamente, é possível definir a dependência na cauda inferior da distribuição λ_L tomando o limite quando k tende para zero e invertendo as desigualdades.

Apêndice B: Mais sobre cópulas

A primeira característica importante de uma cópula é que as distribuições de cada uma das suas componentes estejam definidas no intervalo $[0, 1]$. A segunda característica importante é que as distribuições marginais da cópula sejam as da distribuição uniforme. As cópulas são relevantes porque permitem unir distribuições multivariadas às suas margens univariadas. Sob condições de regularidade bastante gerais, um teorema devido a Sklar (1959, 1973) garante que existe uma cópula C que satisfaz $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$. Por outras palavras, qualquer função de distribuição cumulativa bivariada pode ser decomposta nas suas distribuições marginais e numa cópula. Para além disso, esta última permite caracterizar de forma completa a dependência entre as duas variáveis. Se as funções de distribuição marginais cumulativas forem contínuas, esta cópula é única.

Uma consequência importante disto é que usando a função inversa da distribuição marginal cumulativa de X , F_X^{-1} , para transformar uma variável uniformemente distribuída no intervalo $[0, 1]$, U , obtém-se uma variável que é distribuída de acordo com F_X . O mesmo acontece com Y e uma variável V com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Por conseguinte, $(F_X(x), F_Y(y))$ tem a

7. As funções de distribuição condicionais cumulativas são, no caso de F ser diferenciável, dadas por $F_{X|Y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ e $F_{Y|X}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$.

cópula C como a sua função de distribuição cumulativa, e $(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v))$ tem F como a sua função de distribuição cumulativa. Uma vez que as relações de ordem da expressão (A.2) se mantêm entre (x, y) e os valores uniformemente distribuídos (u, v) , a dependência na cauda da distribuição que ocorra para F também ocorrerá para C .

As cópulas acabam por ser especialmente úteis porque a dependência na cauda pode facilmente ser obtida a partir da sua forma funcional. Para além disso, o seu domínio presta-se facilmente à linguagem de quantis e percentis necessária para o estudo do co-movimento. Existem várias cópulas com interesse, algumas das quais usadas no corpo deste artigo. Ver Trivedi e Zimmer (2005) e Nelsen (2006) para explorações cuidadosas das diferentes cópulas e das suas propriedades. Será suficiente dar aqui apenas um exemplo, que será a cópula Gumbel. A sua expressão é

$$C(u, v) = \exp\left(-\left((-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right), \quad (\text{B.1})$$

em que $\theta \in [1, +\infty]$. Se θ for 1, a cópula reduz-se a $C(u, v) = uv$, que é o caso em que as variáveis são independentes. Se θ tender para $+\infty$, então $C(u, v) = \min\{u, v\}$, que corresponde a dependência máxima; este caso implicaria uma correlação de 1 entre as duas variáveis. Esta cópula não exhibe dependência na cauda inferior, o que poderá ou não ser um obstáculo à sua utilização, mas por outro lado pode exibir dependência na cauda superior tão grande quanto se quiser. Se alguém estiver interessado em olhar para o co-movimento entre revisões grandes e positivas nas expectativas de inflação de curto e de longo prazo, então a cópula Gumbel seria apropriada.⁸ A fórmula acima também permite a computação da dependência na cauda (superior) da distribuição de acordo com a fórmula (A.2); o resultado é $\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$. À medida que θ se aproxima de 1, a dependência na cauda superior aproxima-se de 0, o que significa que não existe dependência; à medida que θ tende para $+\infty$, a dependência na cauda superior aproxima-se de 1, o que significa correlação completa nas caudas das duas variáveis. O Gráfico B.1 contém uma representação visual da cópula Gumbel para diversos níveis de dependência na cauda: θ igual a 1, 1,3, 2,5 e $+\infty$, a que correspondem dependências na cauda de 0, 0,3, 0,68 e 1, respetivamente. Algumas das características típicas das cópulas ficam evidentes. Primeiro, as distribuições marginais são uniformes, como pode ser comprovado pelo segmento de reta conectando os pontos $(1,0,0)$ e $(1,0,1)$, bem como $(0,1,0)$ e $(0,1,1)$. Segundo, à medida que a dependência na cauda se afasta do caso independente ($\theta = 1$) para correlação completa ($\theta \rightarrow \infty$), as curvas de igual probabilidade (as “curvas de nível”

8. Na verdade, também é possível estudar dependência na cauda inferior usando a chamada cópula Gumbel com Rotação, cuja expressão é a mesma que em (B.1) mas com os argumentos substituídos por $1 - u$ e $1 - v$.

no gráfico da cópula) mudam de hipérbolas (com equação $k = uv$) para segmentos conectados com ângulos retos nos pontos tais que $u = v$.

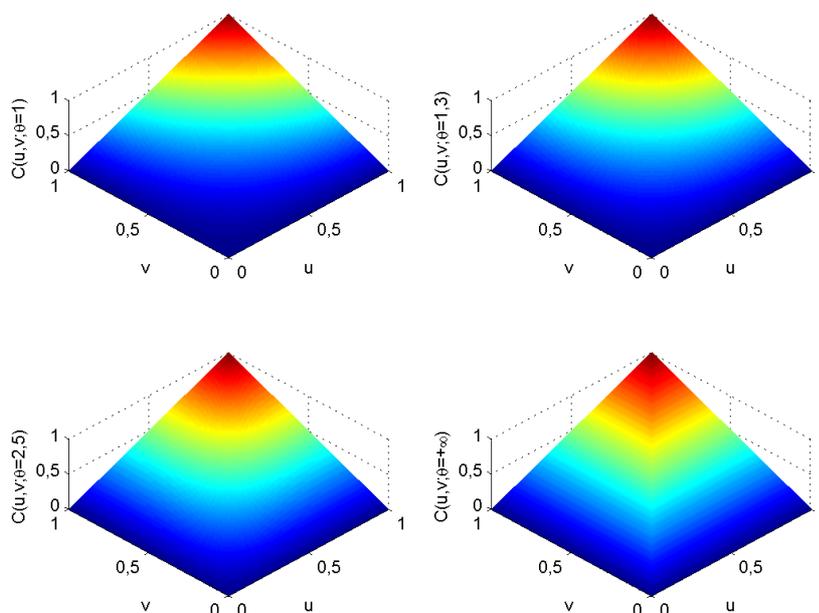


GRÁFICO B.1: Gumbel copula for several values of θ .

Fonte: cálculos do autor.

Um último tópico sobre cópulas é o das cópulas dinâmicas. As cópulas dinâmicas foram usadas pela primeira vez por Patton (2006b) e são essencialmente o mesmo que as cópulas estáticas exceto que um subconjunto ou a totalidade dos seus parâmetros podem variar ao longo do tempo. Patton (2006a), Braun e Grziska (2011) e Oh e Patton (2013) fornecem exemplos de cópulas dinâmicas. A maneira como os parâmetros variam ao longo do tempo é de certo modo arbitrária. Foram também estimadas diversas cópulas dinâmicas com os dados usados neste trabalho. Os resultados não diferem significativamente dos aqui apresentados e estão disponíveis mediante solicitação ao autor.