WAVELETS EM ECONOMIA*

*António Rua***

RESUMO

O objetivo deste artigo é realçar a utilidade da análise com *wavelets* em economia. A análise com *wavelets* é uma abordagem muito promissora e representa um refinamento da análise de Fourier. Em particular, permite ter em consideração quer o domínio do tempo quer o domínio da frequência de forma unificada, ou seja, é possível avaliar simultaneamente a relação entre variáveis em diferentes frequências e se essa relação tem evoluído ao longo do tempo. Apesar do potencial interesse da análise com *wavelets*, esta é ainda uma ferramenta relativamente pouco utilizada no estudo de fenómenos económicos. Neste artigo, os conceitos teóricos básicos são abordados e são discutidas algumas aplicações empíricas.

1. Introdução

A análise no domínio do tempo é, sem dúvida, a abordagem mais usual na literatura económica para estudar séries temporais. Através dessa abordagem, a evolução temporal de cada variável é modelada e as relações multivariadas são aferidas ao longo do tempo. Por sua vez, existe uma corrente da literatura centrada no domínio da frequência. A análise no domínio da frequência é complementar à habitual análise no domínio do tempo. Em particular, através da análise espetral, é possível estudar a importância das diferentes frequências no comportamento univariado bem como aferir a relação entre as variáveis ao nível da frequência.

A análise com *wavelets* (frequentemente traduzido como onduletas) reconcilia ambas as abordagens dado que quer o domínio do tempo quer o domínio da frequência são tidos em consideração. De facto, as *wavelets* constituem uma ferramenta muito promissora uma vez que permitem refinar a análise. Apesar do potencial interesse, as *wavelets* têm sido mais utilizadas em áreas do conhecimento que não em economia. Por exemplo, em geofísica, para estudo de fenómenos oceânicos e atmosféricos, sinais sísmicos e dados climatéricos; em medicina, para análise do batimento cardíaco, variabilidade dos movimentos respiratórios e circulação e pressão sanguínea; em engenharia, para o controle do funcionamento de máquinas, etc (ver, por exemplo, Adisson (2002) para uma coletânea de aplicações). Os exemplos de aplicação de *wavelets* mais conhecidos englobam o algoritmo de compressão de dados relativos a impressões digitais utilizado pelo FBI e o algoritmo JPEG para efeitos de compressão relativa a imagem.

Apesar de existir relativamente pouca literatura em economia utilizando a análise com *wavelets*, este tipo de abordagem pode permitir enriquecer o conhecimento acerca de um conjunto de fenómenos económicos. De facto, como mencionado por Ramsey (2002), *"Wavelets are treated as a 'lens' that enables the researcher to explore relationships that previously were unobservable"* enquanto *"... the ability to apply a new 'lens' to inspect the relationships in economics and finance provides great promise for the development of the discipline"*. Por exemplo, em trabalho pioneiro por Ramsey e Lampart (1998a,b) a

* As opiniões expressas neste artigo são da responsabilidade do autor, não coincidindo necessariamente com as do Banco de Portugal ou do Eurosistema. Eventuais erros e omissões são da exclusiva responsabilidade do autor.

** Banco de Portugal, Departamento de Estudos Económicos.

relação entre várias variáveis macroeconómicas foi revisitada, nomeadamente entre moeda e produção no primeiro caso e entre consumo e rendimento no segundo. Um resumo de aplicações de *wavelets* em economia pode ser encontrado, por exemplo, em Crowley (2007).

O objetivo deste artigo é rever os principais conceitos subjacentes à transformada contínua com *wavelets* e discutir algumas aplicações empíricas[1]. Trabalho recente utilizando a transformada contínua com *wavelets* inclui Crowley e Mayes (2008), Rua (2010), Aguiar-Conraria e Soares (2011a), Rua e Silva Lopes (2012) que utilizam *wavelets* para análise do ciclo económico, Rua e Nunes (2009) avaliam o comovimento dos retornos de índices acionistas, Aguiar-Conraria e Soares (2011b) estudam a relação entre preço do petróleo e a produção industrial, Rua (2012) investiga a ligação entre crescimento monetário e inflação na área do euro e Rua e Nunes (2012) propõem medidas de risco de mercado baseadas em *wavelets*, entre outros.

Apesar da crescente literatura nos últimos anos, existe claramente a possibilidade de alargar a aplicação de *wavelets* em economia. A análise com *wavelets* tem um enorme potencial uma vez que permite investigar relações económicas no espaço tempo-frequência, isto é, permite aferir como é que as variáveis se relacionam em diferentes frequências e se essa relação sofreu alterações ao longo do tempo. Por um lado, dada a constante mutação do contexto económico, a capacidade de ter em conta o domínio do tempo torna-se crucial. Por outro lado, tal como argumentado pelo laureado com o prémio Nobel da Economia em 2003, Clive Granger, não há razão para crer que as variáveis económicas tenham de apresentar a mesma relação em todas as frequências. Assim sendo, a possibilidade de levar em consideração o domínio da frequência torna-se também extremamente importante para efeitos de análise económica.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na secção 2, os principais conceitos subjacentes à análise com *wavelets* são abordados. Na secção 3, são discutidas algumas aplicações empíricas e a secção 4 conclui.

2. Da análise de Fourier à análise com *wavelets*

Em 1807, Jean Baptiste Joseph Fourier, um matemático francês, afirmou que qualquer função periódica pode ser escrita como uma soma infinita de senos e cossenos de várias frequências. Tal ideia levou ao desenvolvimento da conhecida transformada de Fourier. A utilização da transformada de Fourier é a forma convencional para estudar um sinal ao nível da frequência e corresponde à projeção de uma série temporal numa base ortonormal de componentes trigonométricas (ver, por exemplo, Priestley (1981)). Em particular, a transformada de Fourier utiliza uma base de senos e cossenos de diferentes frequências para determinar qual a importância de cada frequência no sinal. A transformada de Fourier de uma série temporal $x(t)$ é dada por

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

onde ω é a frequência angular e $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$ de acordo com a fórmula de Euler.

Durante o século XIX, a transformada de Fourier solucionou vários dos problemas em física e engenharia. Contudo, durante o século XX, matemáticos, físicos e engenheiros aperceberam-se de uma lacuna da transformada de Fourier. A transformada de Fourier não permite que a importância de cada frequência no sinal mude ao longo do tempo e por conseguinte tem dificuldades em reproduzir sinais que apresentam características que se alteram com o decurso do tempo. Por outras palavras, possibilita aferir o contributo de cada frequência para o sinal mas não permite identificar o momento do tempo em que tal ocorreu.

Para ultrapassar esta limitação foi sugerida a transformada de Fourier em tempo curto. Tal como o nome

1 Existem outras variantes da transformada com *wavelets* como, por exemplo, a transformada discreta com *wavelets* (ver, por exemplo, Rua (2011)).

sugere, a ideia subjacente é utilizar a transformada de Fourier para períodos curtos de tempo. Em particular, consiste em aplicar uma janela de tempo ao sinal e usar a transformada de Fourier dentro desta janela à medida que esta desliza pela série temporal.

Contudo, qualquer análise tempo-frequência está limitada pelo princípio da incerteza de Heisenberg. Em 1927, o físico Werner Heisenberg afirmou que a posição e a velocidade de um objeto não podem ser medidas com exatidão mesmo em teoria. Em processamento de sinal, tal significa que é impossível saber simultaneamente a frequência exata e o momento de tempo exato em que ocorre esta frequência. De facto, existe um *trade-off* entre resolução no tempo e na frequência. Isto implica que para janelas menores é possível ter uma melhor resolução no tempo mas pior na frequência enquanto para janelas maiores obtém-se uma melhor resolução na frequência mas pior no tempo.

O problema da transformada de Fourier em tempo curto é que utiliza janelas de dimensão constante. Estas janelas de dimensão fixa traduzem-se na partição uniforme do espaço tempo-frequência. Quando existe um conjunto alargado de frequências envolvidas, uma janela de dimensão temporal fixa tenderá a incluir um grande número de ciclos associados a frequências altas e poucos ciclos de frequência baixa o que se traduz numa sobre-representação de componentes de frequência alta e sub-representação de componentes de frequência baixa. Assim, uma vez que o sinal é examinado sob uma janela tempo-frequência constante, a transformada de Fourier não fornece a resolução adequada a todas as frequências.

Pelo contrário, a transformada com *wavelets* utiliza uma base local de funções que podem ser dilatadas e movidas permitindo uma resolução flexível na frequência e no tempo. No caso da transformada com *wavelets*, a resolução no tempo é intrinsecamente ajustada à frequência com a dimensão da janela a diminuir quando o foco é em altas frequências e a aumentar no caso das frequências baixas. O facto de permitir janelas de diferente dimensão possibilita melhorar a resolução em termos de frequência nas frequências baixas e a resolução temporal nas frequências altas. Isto significa que uma dada componente com frequência alta pode ser melhor localizada no tempo do que uma componente com frequência baixa. Pelo contrário, uma componente com frequência baixa pode ser melhor definida em termos de frequência do que uma componente com frequência alta. Dado que permite uma abordagem mais flexível na análise de séries temporais, a análise com *wavelets* é vista como um refinamento da análise de Fourier.

A discussão acima pode ser ilustrada através do gráfico 1. Para uma série temporal no domínio do tempo, cada observação inclui informação acerca de todas as frequências. Em contraste, no caso da transformada de Fourier, cada ponto no domínio da frequência reflete informação de todas as observações no domínio do tempo. Na transformada de Fourier em tempo curto, o espaço tempo-frequência é dividido utilizando uma janela de dimensão fixa enquanto na transformada com *wavelets* a dimensão da janela é ajustada à frequência.

A transformada contínua com *wavelets* de uma série temporal $x(t)$ pode ser escrita como

$$W_x(\tau,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi^*_{t,s}(t)dt$$

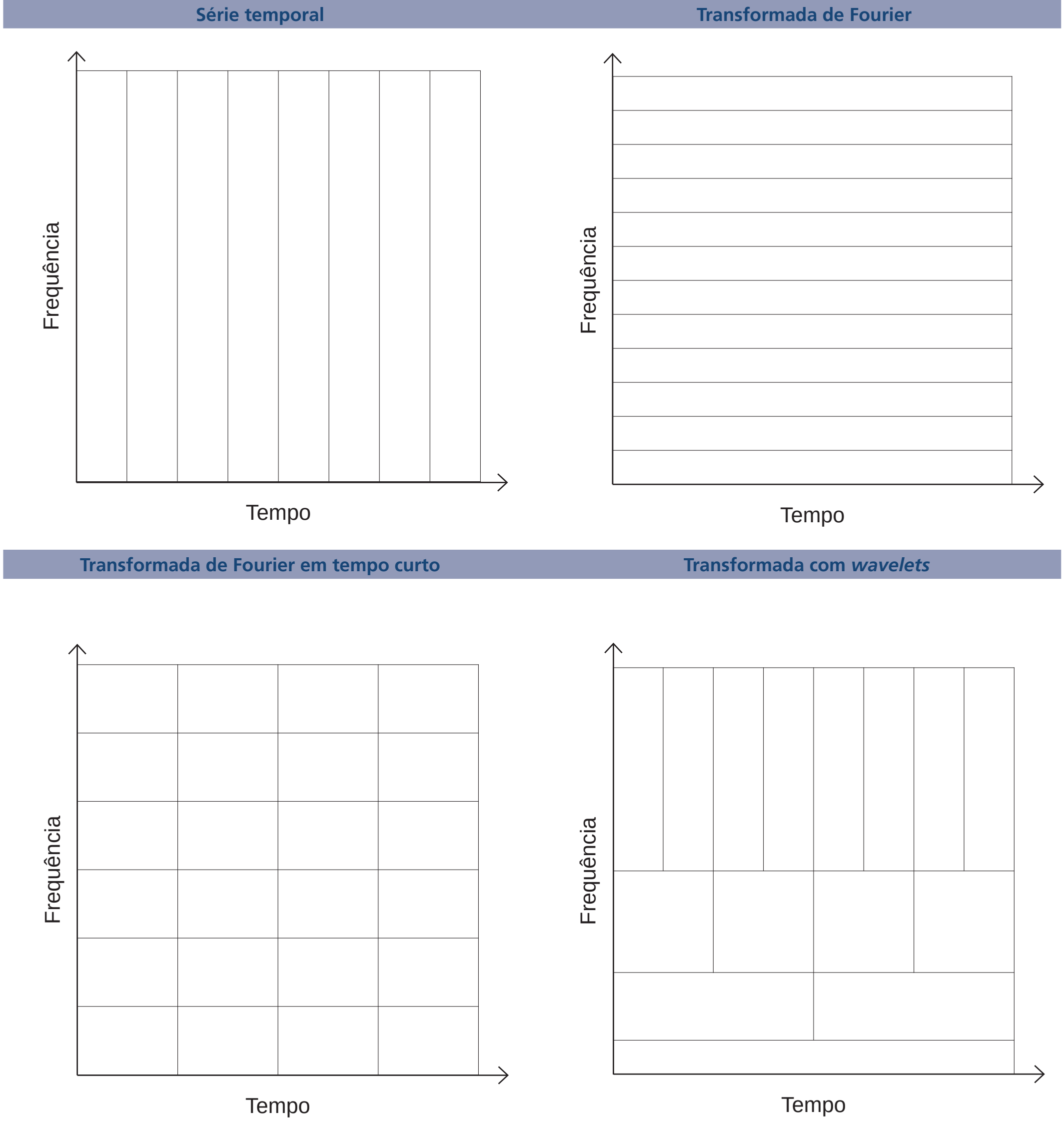
onde * corresponde ao conjugado complexo[2]. Assim, a transformada com *wavelets* decompõe uma série temporal $x(t)$ em termos de certas funções base (*wavelets*) , $\psi_{\tau,s}(t)$ de forma análoga à utilização de senos e cossenos na análise de Fourier. O termo *wavelet* significa pequena onda. Pequena porque tem uma duração finita e onda porque apresenta um comportamento oscilatório. Estas funções base são derivadas da chamada *wavelet* mãe $\psi(t)$ e são definidas como

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

2 Dado que a transformada continua com *wavelets* para um certo momento do tempo utiliza informação na sua vizinhança, os resultados devem ser lidos com cautela junto ao início e fim do período amostral.

Gráfico 1

COMPARAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO TEMPO-FREQUÊNCIA



em que τ determina o momento do tempo e s corresponde à escala. Em termos de frequência, escalas baixas permitem aferir flutuações de curta duração, isto é, frequências altas, enquanto escalas altas captam movimentos mais lentos, ou seja, frequências baixas.

Para ser uma *wavelet* mãe, $\psi(t)$ deve possuir um determinado conjunto de propriedades (ver, por exemplo, Percival e Walden (2000)). Apesar de existem várias funções que podem ser utilizadas para este fim, a *wavelet* mãe mais utilizada na transformada contínua com *wavelet*s é a *wavelet* de Morlet.

Os geólogos geralmente determinam a localização de jazidas de petróleo subterrâneas através da emissão de sons. Dado que as ondas de som se propagam através de diferentes materiais a diferentes velocidades, os geólogos podem inferir que tipo de material se encontra no subsolo através de ondas sísmicas. Contudo, os sinais sísmicos apresentam muitas alterações abruptas na respetiva onda à medida que transitam de camada rochosa. Como discutido anteriormente, a transformada de Fourier não permite reter esta informação. Em 1981, Jean Morlet, geofísico numa companhia petrolífera francesa, desenvolveu o que viria ser chamado como *wavelets* de Morlet para solucionar estes problemas de processamento de sinal na prospeção de petróleo.

Em particular, a *wavelet* de Morlet pode ser escrita como

$$\psi(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{i\omega_0 t} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

É possível constatar que a *wavelet* de Morlet consiste num seno complexo modulada por um envelope Gaussiano. Um das vantagens da *wavelet* de Morlet é a sua natureza complexa o que permite amplitude e fase dependentes do tempo para cada frequência. O parâmetro ω_0 controla o número de oscilações dentro do envelope Gaussiano. Aumentando (diminuindo) ω_0 é possível melhorar (piorar) a resolução em termos de frequência mas piora (melhora) a localização no tempo. Na prática, ω_0 é fixado em 6 o que possibilita um bom equilíbrio entre resolução no tempo e na frequência. Adicionalmente, para ω_0= 6, a escala é quase igual ao período de Fourier o que facilita a interpretação da análise com *wavelets*. Para mais detalhes a acerca da *wavelet* de Morlet ver, por exemplo, Adisson (2002).

Tal como na análise de Fourier, várias medidas relevantes podem ser definidas no domínio das *wavelets.* Por exemplo, o espetro com *wavelets* é definido como $\left|W_x(\tau,s)\right|^2$ e mede a contribuição para a variância da série em torno de um dado momento de tempo e em certa frequência. Outra medida interessante é o espetro cruzado com *wavelets* que permite aferir a covariância entre duas séries no espaço tempo--frequência. Dadas duas séries $x(t)$ e $y(t)$, sendo as respetivas transformadas $W_x(\tau,s)$ e $W_y(\tau,s)$, o espectro cruzado com *wavelets* é definido por $W_{xy}(\tau,s) = W_x(\tau,s)W_y^*(\tau,s)$. Por sua vez, a coerência com *wavelets* é dada por

$$R^2(\tau,s) = \frac{\left|S\left(s^{-1}W_{xy}(\tau,s)\right)\right|^2}{S\left(s^{-1}\left|W_x(\tau,s)\right|^2\right)S\left(s^{-1}\left|W_y(\tau,s)\right|^2\right)}$$

em que $S(.)$ corresponde a um alisamento quer no tempo quer na escala. Tal como acontece com a análise de Fourier, o alisamento também é necessário caso contrário a coerência seria sempre igual a 1. A ideia subjacente à coerência com *wavelets* é similar à correspondente na análise de Fourier. A coerência permite aferir o quanto relacionadas estão duas séries ao longo do tempo e nas diferentes frequências (enquanto que a coerência na análise de Fourier só permite avaliar ao nível da frequência). O $R^2(\tau,s)$ varia entre 0 e 1 com um valor alto (baixo) a indicar uma forte (fraca) relação. Assim, através do gráfico da coerência com *wavelets* é possível distinguir no espaço tempo-frequência quando é que a relação é mais intensa e identificar quer alterações ao longo do tempo quer ao nível da frequência.

Adicionalmente, é possível calcular a fase com *wavelets* permitindo caracterizar a relação de *lead-lag* entre as variáveis no espaço tempo-frequência. A diferença de fase com *wavelets* é definida por

$$\phi(\tau,s) = \tan^{-1}\left(\frac{\Im\left(W_{xy}(\tau,s)\right)}{\Re\left(W_{xy}(\tau,s)\right)}\right)$$

em que $\Re$ e $\Im$ correspondem à parte real e imaginária, respetivamente. A similitude com a medida análoga em análise de Fourier é notória. Esta medida, para além de fornecer informação acerca do *lead--lag* para cada frequência, também permite aferir se esse *lead-lag* mudou ao longo do tempo.

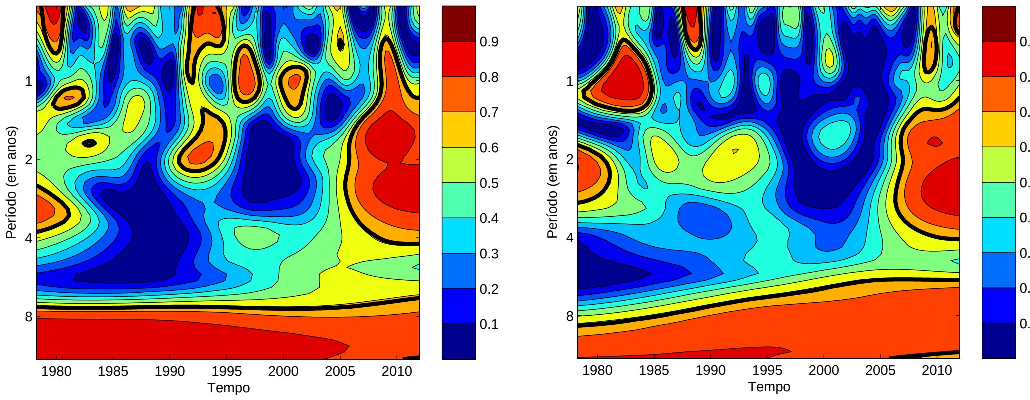
3. Algumas aplicações empíricas

Nesta secção, são apresentadas algumas aplicações dos conceitos acima discutidos. Comecemos por aferir a relação no espaço tempo-frequência da atividade económica em Portugal *vis-à-vis* na área do euro bem como *vis-à-vis* em Espanha, que constitui o principal parceiro comercial de Portugal. Utilizando dados referentes ao PIB em volume, desde o primeiro trimestre de 1978 até ao primeiro trimestre de 2012, a coerência entre as respetivas taxas de variação em cadeia é apresentada no gráfico 2. O eixo

Gráfico 2

COERÊNCIA

Portugal vs. área do euro | **Portugal vs. Espanha**



Fonte: Cálculos do Autor.

horizontal diz respeito ao tempo enquanto o eixo vertical se refere à frequência. Para facilitar a interpretação, a frequência foi convertida para unidades de tempo (anos). Assim, através da análise do gráfico torna-se possível identificar em que bandas de frequências (no eixo vertical) e intervalos de tempo (no eixo horizontal) as séries se encontram relacionadas. A linha de cor preta delimita no gráfico a área de significância estatística com o habitual nível de significância de 5 por cento.

A partir do gráfico 2, é possível concluir que a atividade económica em Portugal tem apresentado uma ligação forte e significativa nos movimentos de longo prazo, nomeadamente em flutuações com periodicidade superior a 8 anos, quer com a área do euro quer com Espanha ao longo de todo o período amostral. No típico intervalo de frequências associado a ciclos económicos, isto é, em flutuações com periodicidade superior a 2 anos mas inferior a 8 anos, observa-se que a intensidade da relação tem vindo a aumentar desde o início da década de 2000 tornando-se estatisticamente significativa ao partir de meados dessa década refletindo uma crescente integração económica. Relativamente a oscilações de curto prazo, é possível identificar alguns episódios onde essa relação se intensificou temporariamente. Por exemplo, a coerência foi particularmente elevada *vis-à-vis* a área do euro durante a recessão de 1992-1993, *vis-à-vis* Espanha em torno do período 1983-1984 e com ambos durante a chamada Grande Recessão em 2009.

Para aferir o correspondente desfasamento, a fase é apresentada no gráfico 3. Dado que a diferença de fase pode ser difícil de estimar quando a coerência é baixa, a área de significância estatística da coerência é representada de novo no gráfico 3. É possível concluir que a atividade económica em Portugal é ligeiramente atrasada nos movimentos de longo prazo mas nas restantes regiões delimitadas pela linha de cor preta, verifica-se uma alternância entre um ligeiro atraso e um ligeiro avanço sem apresentar contudo um desfasamento substancial.

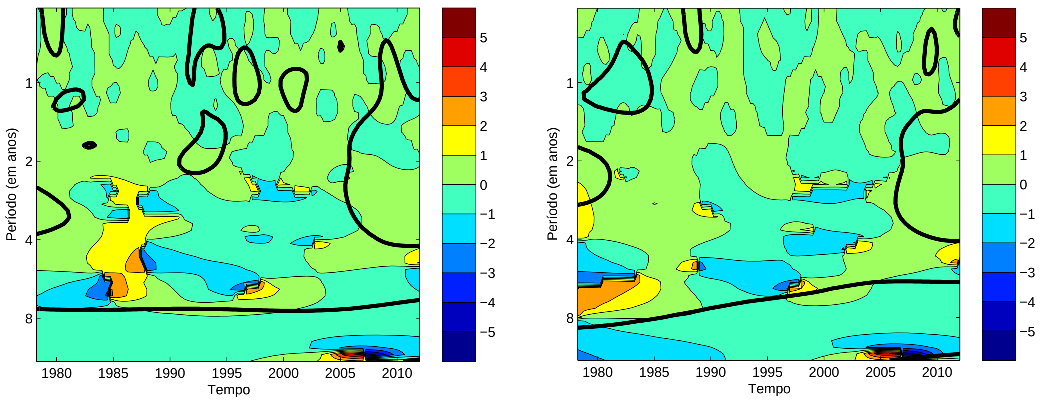
Considere-se agora que se pretende medir o comovimento contemporâneo. Como mencionado anteriormente, a coerência permite investigar o grau de comovimento mas ignora o eventual desfasamento existente entre as variáveis, ou seja, o *lead-lag*. Esta última informação é fornecida pela diferença de fase. Dito de outra forma, a coerência pode ser vista como a correlação (ao quadrado) máxima existente entre as duas variáveis e que se verifica quando o desfasamento entre as duas é dado pela diferença de fase[3].

3 O mesmo raciocínio pode ser aplicado às medidas análogas em análise de Fourier (ver, por exemplo, Rua e Nunes (2005)).

Gráfico 3

FASE

Portugal vs. área do euro | **Portugal vs. Espanha**



Fonte: Cálculos do Autor.
Nota: Um valor positivo deve ser interpretado como *lead* enquanto um valor negativo deve ser lido como *lag* (em anos).

No contexto da análise de Fourier, Croux, Forni e Reichlin (2001) propuseram uma medida espetral, a correlação dinâmica, que permite quantificar o comovimento entre duas séries em cada frequência. Esta medida, que varia entre -1 e 1, é conceptualmente semelhante ao coeficiente de correlação contemporânea entre duas séries no domínio do tempo. Contudo, ao contrário do coeficiente de correlação no domínio do tempo, torna-se possível ter uma medida de comovimento que pode variar com a frequência. Rua (2010) propõe uma medida baseada em *wavelets* que pode ser vista como uma generalização da correlação dinâmica proposta por Croux, Forni e Reichlin (2001) dado que permite aferir o comovimento contemporâneo quer ao nível da frequência quer ao longo do tempo. Tal pode ser de extrema importância para avaliar, por exemplo, o grau de sincronização das flutuações macroeconómicas entre países ou regiões o que assume particular relevância na discussão dos benefícios da integração económica.

Os resultados obtidos com a medida proposta por Rua (2010) são apresentados no gráfico 4. Qualitativamente, as conclusões a partir do gráfico 4 não diferem significativamente das resultantes do gráfico 2, refletindo o facto de não existir um desfasamento substancial entre as séries. A partir do gráfico 4, torna-se evidente que a sincronização tem sido sempre elevada em flutuações de longo prazo. Por sua vez, no típico intervalo de frequências associado a ciclos económicos, a sincronização tem vindo aumentar desde da união monetária em 1999. Refira-se que esta sincronização mais elevada também se observou nas flutuações de curto prazo durante a Grande Recessão mas que posteriormente se registou um *decoupling*.

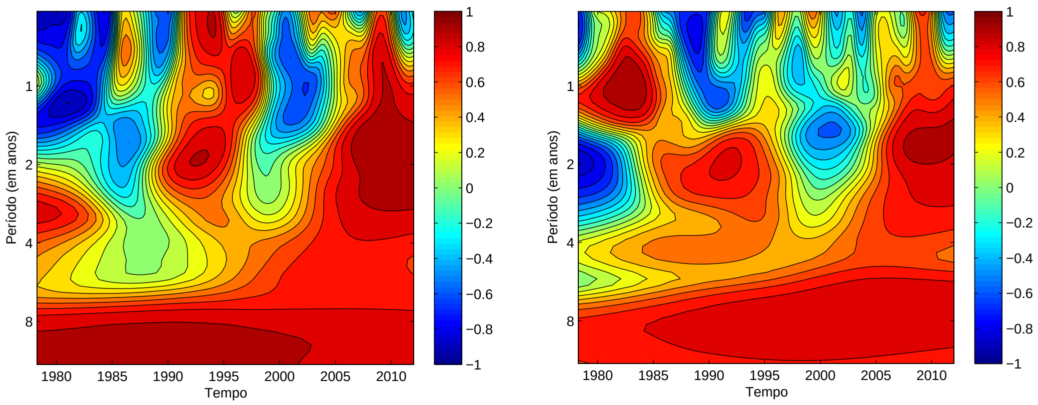
Por forma a ter em consideração mais do que duas séries aquando da avaliação do comovimento, Croux, Forni e Reichlin (2001) generalizaram a correlação dinâmica ao caso multivariado e denominaram esta medida como coesão. A coesão é basicamente uma média ponderada das correlações dinâmicas entre todos os pares possíveis num grupo de variáveis. Por exemplo, esta medida pode constituir uma estatística sumária do grau de sincronização entre países ou regiões sem ter o problema de escolher um país ou região base. À semelhança de Croux, Forni e Reichlin (2001), Rua e Silva Lopes (2012) generalizaram a medida bivariada proposta por Rua (2010) por forma a obter uma medida de coesão no espaço tempo-frequência. A coesão basesada em *wavelets* também varia entre -1 e 1 e permite quantificar o grau de coesão entre várias séries em diferentes frequências e investigar se tal relação se alterou ao longo do tempo.

Considere-se as séries longas para o crescimento do PIB anual construídas por Angus Maddison (disponíveis em www.ggdc.net/maddison) e atualizadas com os dados do mais recente World Economic Outlook do

Gráfico 4

COMOVIMENTO CONTEMPORÂNEO NO ESPAÇO TEMPO-FREQUÊNCIA

Portugal vs. área do euro | **Portugal vs. Espanha**

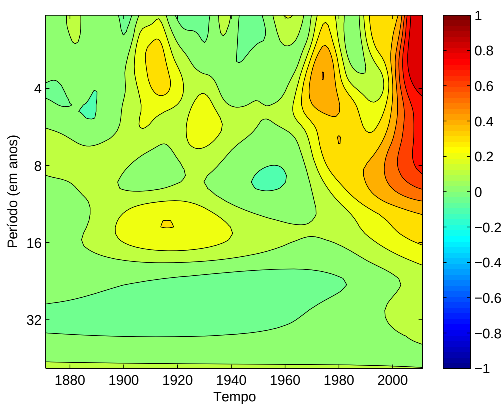


Fonte: Cálculos do Autor.

Fundo Monetário Internacional. Em particular, considerou-se o período amostral desde 1871 até 2011 para vários países (nomeadamente, Áustria, Bélgica, Dinamarca, Finlândia, França, Alemanha, Itália, Países Baixos, Noruega, Suécia, Suíça, Reino Unido, Portugal, Espanha, Austrália, Nova Zelândia, Canadá, EUA, Brasil, Chile, Uruguai, Japão e Sri Lanka) que representam quase 60 por cento do PIB mundial em 1990. Utilizando pesos no PIB, os resultados obtidos para a medida de coesão baseada em *wavelets* são apresentados no gráfico 5. Da sua análise, destaca-se o seguinte resultado. Considerando os últimos 140 anos, a sincronização do ciclo económico nunca foi tão elevada como a observada durante a mais recente crise económica e financeira. Tal facto revela a natureza global deste episódio e o atual grau de integração económica mundial.

Gráfico 5

COESÃO MUNDIAL



Fonte: Cálculos do Autor.

4. Conclusão

O objetivo deste artigo é motivar o leitor para a utilidade da análise com *wavelets* em economia. Contudo, a exposição acima efetuada não se destina a constituir uma descrição exaustiva da análise com *wavelets*. De facto, a finalidade deste artigo é fornecer de forma intuitiva e contida um resumo das principais ferramentas relacionadas com a transformada contínua com *wavelets*. Inicialmente, foram abordados os conceitos básicos subjacentes a análise com *wavelets* bem como a sua relação com a análise de Fourier. De seguida, ilustrou-se a utilização dessas ferramentas através da discussão de algumas aplicações empíricas.

Apesar de uma crescente literatura nos últimos anos, existe manifestamente margem para ampliar a aplicação da análise com *wavelets*. De facto, análise com *wavelets* permite estudar relações entre variáveis económicas no espaço tempo-frequência, isto é, aferir simultaneamente a forma como as variáveis se relacionam em diferentes frequências e se tal relação tem evoluído com o tempo. Tal pode ser de extrema relevância no estudo do comportamento económico num mundo complexo e em constante mutação.

Referências

Adisson, P. (2002) The illustrated wavelet transform handbook, The Institute of Physics, London.

Aguiar-Conraria, L. e Soares, M. J. (2011a) "Business Cycle Synchronization and the Euro: a Wavelet Analysis", *Journal of Macroeconomics*, 33(3), 477 - 489.

Aguiar-Conraria, L. e Soares, M. J. (2011b) "Oil and the macroeconomy: using wavelets to analyze old issues", *Empirical Economics*, 40(3), 645 - 655.

Croux, C., Forni, M. e Reichlin, L. (2001) "A measure of comovement for economic variables: theory and empirics", *Review of Economics and Statistics*, 83, 232-241.

Crowley, P. (2007) "A guide to wavelets for economists", *Journal of Economic Surveys*, 21, 207-264.

Crowley, P. e Mayes, D. (2008) "How Fused is the Euro Area Core? An Evaluation of Growth Cycle Co-movement and Synchronization Using Wavelet Analysis", *Journal of Business Cycle Measurement and Analysis*, vol. 4, no. 1, 63-95.

Percival, D. e Walden, A. (2000) Wavelet methods for time series analysis, Cambridge University Press.

Priestley, M. (1981) Spectral analysis and time series, Vols. I e II, Academic Press, London.

Ramsey, J. (2002) "Wavelets in Economics and Finance: Past and Future", *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, vol. 6, no. 3, artigo 1.

Ramsey, J.e Lampart, C.(1998a) "Decomposition of economic relationships by time scale using wavelets", *Macroeconomic dynamics* 2 (1), 49-71.

Ramsey, J. e Lampart, C. (1998b) "The decomposition of economic relationships by time scale using wavelets: expenditure and income", *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* 3 (1), 23-42.

Rua, A. (2010) "Measuring comovement in the time-frequency space", *Journal of Macroeconomics*, 32, 685-691.

Rua, A. (2011)) "A wavelet approach for factor-augmented forecasting", *Journal of Forecasting*, 30, 666-678.

Rua, A. (2012) "Money growth and inflation in the euro area: a time-frequency view", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, doi: 10.1111/j.1468-0084.2011.00680.x.

Rua, A., e Nunes, L.C. (2005) "Coincident and leading indicators for the euro area: A frequency band approach", *International Journal of Forecasting*, 21, 503-523.

Rua, A., e Nunes, L.C. (2009) "International comovement of stock market returns: A wavelet analysis", *Journal of Empirical Finance* 16, 632-639.

Rua, A., e Nunes, L.C. (2012) "A wavelet-based assessment of market risk: The emerging markets case", *Quarterly Review of Economics and Finance*, vol. 52, 84-92.

Rua, A., e Silva Lopes, A. (2012) "Cohesion within the euro area and the U. S.: a wavelet-based view", Banco de Portugal, *Working Paper* no.4/2012.